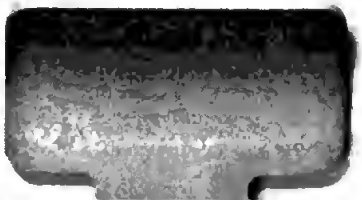
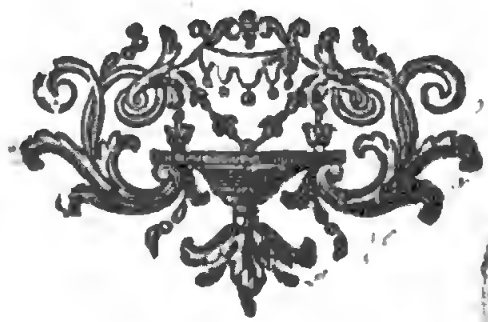


Digitized by Google

ECLAIRCISSEMENS
SUR
L'ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS.

PAR M. VARIGNON,
Membre des Academies Royales des Sciences de Paris, de Londre, & de Berlin, & Profeſſeur Royal.



A PARIS;
Chez ROLLIN, Quay des Auguſtins, à la deſcente du Pont S. Michel, au Lion d'or.

M. DCC. XXV.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Digitized by Google

Digitized by Google

LE LIBRAIRE AU LECTEUR.

TOUT ce qui peut le plus faire eſtimer un ouvrage ſe trouvera dans celui-ci, l'utilité de la matiere, & la capacité de l'Auteur qui l'a compoſé.

Les ſuccès du Livre de M. le Marquis de l'Hôpital ſur l'Analyſe des Infiniment Petits, les applaudiſſemens qu'il a reçus dans tous les lieux où les Mathematiques ſont connues, l'uſage que tous les plus habiles Geometres font du calcul differentiel dont il a donné les régles, ſont des preuves indubitables de l'utilité de cette nouvelle Méthode, & nous exemptent d'en parler ici & d'en expliquer les avantages.

Pour ce qui eſt de M. Varignon, il faut ignorer juſqu'au nom de la Geométrie pour ne ſavoir pas les progrès qu'il avoit fait dans cette Science & principalement dans les nouvelles Methodes, & la réputation que lui ont acquiſe dans toutes les parties de l'Europe les excellens morceaux qu'il a donnés ſur cela, & qui tiennent un lieu ſi conſiderable dans les Memoires de l'Academie des Sciences.

Avec cette habileté ſi profonde en ces matiéres & ſi généralement reconnue, il s'étoit appliqué pendant pluſieurs années à lire & à examiner

l'Analyſe des Infiniment Petits de M. le Marquis de l'Hôpital, & il avoit recueilli avec beaucoup de ſoin tout ce qui lui étoit venu à l'eſprit ſur cela, & qui lui avoit paru capable de contribuer à la perfection entiere de ce Traité.

Comme j'avois connoiſſance de ce travail de M. Varignon avant la perte que fit l'Academie par la mort de ce grand Geometre, je me perſuadai que je rendrois au Public un ſervice important, & dont il me ſauroit gré, ſi j'empêchois que ce Manuſcrit ne paſſât après ſa mort dans les mains de quelque particulier à l'utilité duquel ſeul il eût ſervi, ou qu'il ne rentrât dans l'obſcurité de quelque cabinet ou de quelque Bibliothéque, d'où peut être il ne ſeroit jamais ſorti, & ſi je l'acquerois à quelque prix que ce fût pour l'imprimer, & en faire préſent aux Savans.

Quand j'en fus le maître, des Connoiſſeurs qui le virent, me confirmerent dans la penſée que j'avois eue & me preſſérent de le faire paroître. Et depuis que l'on a été inſtruit du deſſein que j'avois de le mettre en lumiere & que le bruit s'en eſt répandu, on m'a écrit pluſieurs fois, & on me l'a demandé de tous côtés.

Il n'a pas tenu à moi que je ne contentaſſe plutôt les empreſſemens du Public : mais enfin le voici ce Recueil des méditations & des recherches de M. Varignon ſur l'Analyſe des Infiniment Petits de M. le Marquis de l'Hôpital. Je n'ai rien épar-

gné pour ſeconder les ſouhaits du Public, & pour faire que l'édition repondît à l'excellence de l'Ouvrage ; & j'oſe eſperer qu'on ne ſera à proportion gueres moins content de moi qu'on le ſera à coup ſeur de l'Auteur.

Il n'avoit point mis de titre à ſon Ouvrage. Il paroît qu'il avoit deſſein de l'imprimer en forme de Notes avec le Texte de M. le Marquis de l'Hôpital : mais comme l'Analyſe des Infiniment Petits a déja paru pluſieurs fois & en France & dans les Pays étrangers, qu'elle eſt très répandue, & que tous les gens du métier en ſont fournis, j'ai cru que je leur ferois plaiſir de leur épargner la dépenſe de l'acheter une ſeconde fois, & qu'il ne ſeroit pas moins commode de lire le Commentaire dans un volume ſéparé que l'on pouroit aiſément avoir devant les yeux en même temps que l'Analyſe qu'il éclaircit & qu'il explique, que de les avoir tous-deux dans un même livre.

J'y ai mis le titre d'*Eclairciſſemens*, le plus naturel & le plus ſimple qu'il m'a paru qu'on y pût donner. Ce ne ſont pourtant pas de ſimples Eclairciſſemens, ni des explications ſeulement des endroits obſcurs, ou difficiles de l'Analyſe, qui en facilitent l'intelligence aux Commençans. On y trouvera des Additions conſidérables, des Propoſitions nouvelles, des Problêmes ajoutés à ceux de M. le Marquis de l'Hôpital, des Regles, des Conſtructions, des Méthodes différentes

trouvées par M. Varignon : mais ſoit Eclairciſſemens, ſoit Additions, tout y paroîtra digne de ces deux grands Académiciens, tout y ſoutiendra la réputation de l'Auteur, tout y méritera l'attention des Geométres les plus conſommés.

M. le Marquis de l'Hôpital, & M. Varignon étoient ſi unis enſemble & par les liens de l'amitié, & par la conformité de leurs goûts, de leurs études, de leurs ſentimens ſur ces matiéres, qu'ils ne faiſoient preſque rien qu'ils ne ſe communicaſſent l'un à l'autre, & que ces Eclairciſſemens pourroient paſſer pour des Réfléxions de M. le Marquis de l'Hôpital lui-même ſur ſon ouvrage, & qu'on pourroit en quelque ſorte les appeller une nouvelle édition de l'Analyſe des Infiniment Petits, revûe, corrigée, & augmentée par l'Auteur, ou du moins ſelon les vûes de l'Auteur.

Au reſte l'on a ſuivi le Manuſcrit de M. Varignon avec la derniere exactitude. On n'a rien voulu en retrancher, & l'on donne les choſes mêmes qu'il n'avoit que jettées ſur le papier pour les éxaminer, telles que la Remarque ſur les tangentes, pag. 12, celles qu'il avoit changées enſuite, comme la Remarque ſur l'Article 67, des Infiniment Petits, page 42, & celles qu'il avoit laiſſées imparfaites, comme la Propoſition de la page 80, dont il n'a point fait la Démonſtration.

On a ſuivi de même très ſoigneuſement tous

les renvois qu'il avoit marqués, & l'on a rapporté chaque Eclairciſſement à l'article, à la page, & à la ligne qu'il avoit déſignés par ſon renvoi : en ſorte que ſi M. Varignon avoit préſidé lui-même à l'impreſſion de ſon Ouvrage, il n'eût pû être plus fidélement éxécuté.

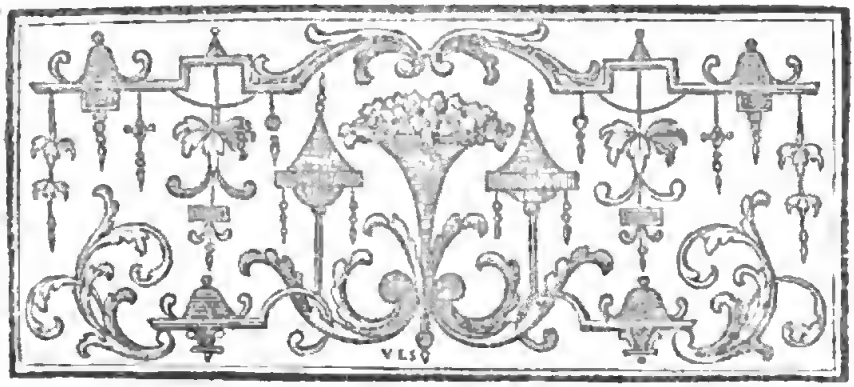
On trouvera deux ſortes de Figures marquées aux marges, celles que M. le Marquis de l'Hôpital a données dans l'Analyſe des Infiniment Petits, & celles que M. Varignon à faites pour ces Eclairciſſemens & que l'on voit à la fin de ce Livre. Quand on renvoye à ces dernieres, c'eſt-à-dire, à celles de M. Varignon qui ſont à la fin de ces Eclairciſſemens, on s'eſt contenté de marquer le nombre de la Figure, par exemple, *Fig.* 1. *Fig.* 2. *Fig.* 3, *&c.* Et quand on veut indiquer celles de l'Analyſe des Infiniment Petits, on a ajouté au nombre de la Figure, qu'elle eſt de l'Analyſe des Infiniment Petits, en cette maniere, *Fig.* 3. *des Infin. Petits*, *Fig.* 12. *des Infin. Petits*, *&c.*

Quelque peine que l'on ſe ſoit donnée pour que ces Figures fuſſent exactement marquées, on n'a pu empêcher qu'il ne s'y gliſſât quelques fautes, qui ne peuvent néanmoins faire de confuſion par le ſoin qu'on a pris d'y ſuppléer. L'erreur eſt dans quelques uns des nombres qui marquent les Figures de M. Varignon, qui ſont à la fin du Livre, 1°. à la page 17, vis-à-vis la ligne 6, on a oublié de mettre à la marge *Fig.* 5. & à la

42
1

page 24, vis-à-vis la ligne 20, de mettre à la marge *Fig.* 10. 2°. Depuis la Figure 31 juſqu'à la 36, on a mal marqué les nombres, & l'on n'a pu s'en appercevoir par la confrontation des Figures, parcequ'elles étoient alors chez le Graveur. L'on a remedié à ces inconveniens en deux manieres, 1°. Par un Errata. 2°. Sur les Planches mêmes en y marquant à chacune des Figures mal indiquées dans l'Imprimé, la page à laquelle elle ſe doit rapporter. Ainſi ces fautes ne peuvent cauſer le moindre embarras.

ECLAIRCISSEMENS



ECLAIRCISSEMENS SUR L'ANALYSE DES INFINIMENT PETITS.

Infiniment Petits, page premiere.

DE'FINITION PREMIERE.

TOUTE quantité qui gardant la même expreſſion, augmente ou diminue continuellement (*non per ſaltum*), eſt appellée *variable*; & celle qui, ſous la même expreſſion, garde la même valeur, eſt appellée *fixe* ou *conſtante*. Ainſi, lorſque dans une parabole on nommera chaque ordonnée, y; & chaque fléche ou coupée, x; & le paramétre, a: l'ordonnée & la coupée ſeront des quantitez *variables*; & le paramétre ſera une quantité conſtante.

Page 2. DE'FINITION II.

La *difference* ou *differentielle* d'une quantité, eſt l'ac-

croiſſement ou la diminution inſtantanée de ſa valeur. Ainſi la différence d'une quantité variable ſera une portion indéfiniment petite, dont ſa valeur augmente ou diminue continuellement ; celle d'une quantité conſtante ſera toujours zero.

Page 2. SUPPOSITION PREMIERE.

Toute quantité qui n'eſt augmentée ou diminuée que d'une partie infiniment petite par rapport à ſon tout, peut être priſe pour la même qu'elle étoit avant ce changement : *Mutatio indefinitè parva, mutatio nulla.*

Page 3. SUPPOSITION II.

Tout produit qui réſulte d'une quantité indéfiniment petite par une autre quantité indéfiniment petite, eſt nul.

AVERTISSEMENT.

Pour faciliter ce calcul, en fixant l'imagination, on exprimera dans la ſuite les quantitez conſtantes par les premieres lettres de l'Alphabet : a, b, c, e, f, g, &c. (*excepté* d *qui ſervira de caractériſtique aux différentielles*) ; *les variables par les dernieres lettres* x, y, z, &c. *& les différences de ces variables* x, y, z, &c. *par* dx, dy, dz, *&c.*

REMARQUE

Sur les differentielles des appliquées circulaires.

FIGURE I. SOIT un cercle *AEG*, dont le centre *C*, avec une courbe quelconque *LD*, dont les abſciſſes *AH*, & les appliquées circulaires *HL*, décrites du centre *C*. Si l'on en imagine deux *HL*, *hl*, indéfiniment proches l'une de l'autre, avec les deux rayons correſpondans *CE*, *Ce* & *IO*, telle que l'on ait *RL*. *RO* :: *CR*. *hR*. Je dis que *OL*

Digitized by Google

ſera la différence de cette appliquée HL, hl, c'eſt-à-dire, que $hl - HL = Ol$.

DE'MONSTRATION.

PUISQUE (*hyp.*) $CR.hR :: RL.RO = \frac{hR \times RL}{CR}$. L'on aura $hR + RO\,(hO) = hR + \frac{hR\,RL}{CR} = \frac{hR \times CR + RL}{CR} = \frac{hR \times CL}{CR}$ $= HL$. Donc $Hl - HL = Hl - hO = Ol$. Et par conſéquent Ol ainſi priſe, ſera la différence des appliquées circulaires hl, HL. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE.

Donc auſſi ayant $CE.CR :: Ee$, $Rl = \frac{CR \times Ee}{CE}$ & $CE.CR :: AE.hR = \frac{CR \times AE}{CE}$. L'on aura cette difference $Ol\,(Rl - RO) = \frac{CR \times Ee}{CE} - \frac{hR \times RL}{CR} = \frac{CR \times Ee}{CE} - \frac{AE \times RL}{CE} = \frac{CR \times Ee - AE \times RL}{CE}$.

SCHOL. On voit de-là qu'en fait d'appliquées circulaires HL, leurs différentielles ne ſont pas Rl; & que ces Rl ſe doivent toujours chercher par l'Analogie de $CE.CR :: Ee.Rl = \frac{CR \times Ee}{CE}$.

Mais il faut prendre garde que l'Analogie ſuppoſée de $CR.hR :: RL.RO$. ne rend pas LO paralelle à AC, comme on le pourroit peut-être penſer. Car ſi LO étoit parallele à AC, l'on auroit (en faiſant en R la tangente RT) $RL.RO :: CR.RT$, & non pas $RL.RO :: CR.hR$. Ce qui eſt fort different, puiſque hR & RT, étant (*hyp.*) finies; & par conſequent RT, étant plus grande que hR, d'une différence finie, la premiere RO ſeroit auſſi plus grande que la ſeconde, d'une différence de même genre qu'elles; & par conſequent plus grande qu'il ne faut, la ſeconde RO étant celle que requiert la démonſtration précedente. Donc LO ne doit point être parallele à AC.

Il eſt encore à remarquer que puiſque la différence des appliquées circulaires HL, hl, eſt Ol, & non Rl, l'intégrale de Rl ne ſera point hl, mais bien celle de Ol; c'eſt-à-dire, que $hl = ſol$, & non $hl = ſRl$. C'eſt auſſi pour cela qu'en appellant hl, z; l'on aura $Ol = dz$, & non pas $Rl = dz$; ou ſi l'on faiſoit $Rl = dz$, l'on n'auroit plus $hl = z$.

Page 3, II. Suppoſition, Art. 3.

PROPOSITION.

FIGURE II *Soit une Courbe quelconque* ABF, *dont* AE *ſoit la tangente en* A, *de quelque Point* C *pris à diſcrétion ſur la droite* AC, *ſoit une ſécante quelconque* CE, *laquelle rencontre cet arc en* B, *d'où tombe* BD *paralelle à* EA, *avec la corde* BA. *Si l'on imagine la droite* CE *en mouvement autour du Point* C *vers* AC, *de maniere que* BD *&* BA *ſuivant ce Point* B *à meſure qu'il s'aproche du Point* A. *Je dis qu'à la fin la toucbante* EA, *ſa paralelle* BD, *l'arc* AOB, *& ſa corde* AB, *ſe confondront & deviendront égaux entr'eux.*

DE'MONSTRATION.

DE ce que l'on ſuppoſe BD par-tout parallele à EA, l'on aura auſſi par-tout $BD . EA :: CB . BE$. Or le mouvement qu'on ſuppoſe dans CE, la confondant enfin avec CA, auſſi bien que les Points B & E avec A; les droites CB, CE ſe trouveront à la fin égales entr'elles. Donc à la fin les droites BD, EA, deviendrout auſſi égales entr'elles; & même encore égales à l'arc AOB & à ſa corde AB qu'elles interceptent, avec leſquels elles s'appliquent & conviennent alors. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

Comme ce ne ſont plus alors que des parties infiniment petites de BD, BA, BOA, EA, qui ſe confondent en une; il ſuit qu'une partie infiniment petite de quelque courbe que ce ſoit, peut être priſe pour une ligne droite, & cette courbe pour un polygone d'une infinité de côtez.

Page 3, ſur l'Art. 4.

PRINCIPE UNIVERSEL

Du Calcul des differences.

POUR prendre la difference de pluſieurs quantitez quelconques, ajoutées, ſouſtraites, multipliées ou diviſées enſemble, dont l'artifice ſe reduit à ſubſtituer chaque quantité ſimple + ſa difference en ſa place: enſuite on fait à l'ordinaire l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, ou la Diviſion requiſe, de ces quantitez ſubſtituées; après, qu'on retranche du réſultat de cette operation, la grandeur propoſée avec les termes nuls; & ce qui réſtera ſera au juſte la difference cherchée. Par exemple:

DE L'ADDITION ET SOUSTRACTION.

Il s'agit de trouver la différence des quantitez $a + x + y - z$. Subſtituons chacune de ces quantitez avec ſa différentielle à la place de chacune d'elles: ſçavoir, $a + o = a$, $x + dx = x$, $y + dy = y$, $z + dz = z$; l'on aura $a + o + x + dx + y + dy + z + dz$, de laquelle ſomme, ſi l'on retranche la grandeur propoſée $a + x + y - z$, il reſtera $o + dx + dy - dz$, ou ſimplement $dx + dy - dz$, qui ſera la différence cherchée.

DE LA MULTIPLICATION.

TROUVER *la difference du produit* axy.

Si l'on ſubſtitue encore $a + o$, $x + dx$, & $y + dy$, à la place de a, x, y, leur produit ſera $axy + axdy + aydx + xyo + oxdy + oydx + adxdy + odxdy$, duquel retranchant le propoſé axy, & les cinq derniers qui ſont nuls, le reſte $axdy + aydx$ ſera la difference cherchée.

DE LA DIVISION.

TROUVER *la différence de* $\frac{x}{y}$.

SOIT $\frac{x}{y} = z$, & en ſubſtituant ces grandeurs plus leurs differentielles en leurs places, l'on aura $\frac{x+dx}{y+dy} = z + ch$, ou (en faiſant évanouir la fraction) $x + dx = yz + ydz + zdy + dydz$ (en ôtant le terme nul $dydz$) $= yz + ydz + zdy$; ce qui donne $dz = \frac{x+dx-yz-zdy}{y}$ (en ſubſtituant $= \frac{x+\frac{x-yz=xdy}{y}-yz-zdy}{y}$ au lieu de z ſa valeur $\frac{x}{y}$) $= \frac{x+dx-yz=xdy}{\frac{y}{y}} = \frac{yx+ydx-yx=xdy}{yy} = \frac{ydx-xdy}{yy}$, pour la difference cherchée.

COROLLAIRE.

Comme dans toutes les opérations précédentes nous n'avons eu égard à aucune circonſtance particuliere qui puiſſe leur ôter leur univerſalité, & les reſtreindre à quelque cas particulier ; il eſt évident que de réſultat chaque opération peut être pris pour une formule générale qui embraſſe tous les cas imaginables dans ce même genre. Ainſi,

REGLE GENERALE

Pour l'Addition & la Souſtraction.

Puiſque la formule qui donne $dx + dy - dz$ pour la différence des quantitez $a + x + y - z$, il ſuit qu'étant donnée une ſomme de quantitez quelconques variables ou non variables, affirmées ou niées : pour avoir la difference totale, il faut prendre la difference en particulier de chacune des variables, & ranger ces differences de ſuite, chacune gardant le même ſigne que la variable dont elle eſt différence.

REGLE GENERALE

Pour la Multiplication.

Puiſque la formule qui donne la différence des quan-

titez multipliées enſemble axy, eſt $axdy + aydx$, on a la Régle génerale ſuivante.

Prenez la difference de chaque quantité variable que vous trouverez dans la grandeur à differentier, & la multipliez par le produit des autres tant variables que non variables ; ce qui donnera autant de produits differentiels qu'il y a de variables dans le propoſé à differentier : la ſomme de tous ces produits differentiels, ſera la difference cherchée.

RE'GLE GE'NERALE.

Pour la Diviſion.

Puiſque la formule qui donne la différence des quantitez diviſées $\frac{x}{y}$, ſe réduit à $\frac{ydx - xdy}{yy}$, on a la Régle génerale qui ſuit.

Prenez la différence du terme ſupérieur, que vous multiplirez par le terme inferieur, & la différence du terme inférieur que vous multiplirez auſſi par le même ſupérieur : vous aurez deux produits dont le premier renferme la différence du terme ſupérieur, & l'autre le renferme lui-même ; ôtez le ſecond du premier, & diviſez le tout par le quarré du terme inférieur : cette fraction ſera la difference cherchée.

Page 4, Art. 5, 2°, ligne 2.

Par exemple, $xy = u$, qui (*nomb.* 11) donne $xdy + ydx = du$; l'on aura $xyz = uz$; & conſequemment $dxyz = udz + zdu$ (en reſtituant les valeurs de u, du) $= xydz + zxdy + zydx$, ainſi que l'Auteur le dit.

Page 5, Art. 5, 3°, à la fin ajoutez.

A cauſe que x & y expriment encore ici telles grandeurs qu'on voudra.

Page 5, Art. 6, après ces mots, d'où l'on forme cette régle, *ajoûtez :*

A cauſe que x & y expriment telles grandeurs qu'on voudra.

Page 5, Art. 6.

Cela se peut encore démontrer autrement ; car x devenant $= x + dx$ & $y = y + dy$, l'on aura $\frac{x}{y} = \frac{x+dx}{y+dy}$; ainsi en retranchant $\frac{x}{y}$ de part & d'autre, sa differentielle se trouvera $= \frac{x+dx}{y+dx} - \frac{x}{y} = \frac{xy+ydx-xy-xdy}{yy+ydy} = \frac{ydx-xdy}{yy+ydy} = \frac{ydx-xdy}{yy}$, à cause que $yy + ydy = yy$, ydy, étant infiniment petit par rapport à yy, c'est-à-dire, comme dy est à y. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE PREMIERE.

DE même que la Proposition 3. dont il s'agit, a été prouvée par la précedente Proposition 2. de même aussi cette Proposition 2. peut être prouvée à son tour par la preuve qu'on vient d'ajouter de la Proposition 3. En effet, soit $xy = z$; l'on aura $x = \frac{z}{y}$, & (*Demonst. preced.*) $dx = \frac{ydz-zdy}{yy}$, ou $yydx = ydz - zdy$ (à cause $xy = z$) $= ydz - xydy$. Donc $yydx + xydy = ydz$ ou, $ydx + xdy = dz$ differentielle de z ou (*hyp.*) de xy. *Ce qu'il faloit démontrer.*

On voit donc que ces deux Propositions 2 & 3, se peuvent également prouver, soit dépendemment ou indépendemment l'une de l'autre.

Page 6, Art. 7.

REMARQUE II.

PUisque (*article 5*) la difference de xyz, est $= xydz + xzdy + yzdx$: Si $x = y = z$, l'on auroit $xyz = x^3$, dont la difference seroit $xxdx + xxdx + xxdx + xxdx = 3xxdx$. De même la difference de $rstuxyz$, étant (*nomb. 5*) $= rstuxydz + rstuxzdy + rstuyzdx + rstxyzdu + rsuxyzdt + rtuyzxds + stuxyzdr$; si toutes les grandeurs qui sont dans le produit $rstuxyz$, sont égales entre elles, en sorte qu'il soit $= xxxxxxx = x^7$, la difference sera $= x^6dx + x^6dx + x^6dx + x^6dx + x^6dx + x^6dx + x^6dx = 7x^6dx$. Et ainsi de tant d'autres produits qu'on voudra, faits de tels nombres de grandeurs quelconques qu'on voudra, lesquelles

leſquelles étant enſuite ſuppoſées toutes égales entr'elles, en feront une puiſſance d'une d'elles, d'autant de dimenſions qu'il y en a dans ce produit ; & ſuivant ce qui précede, la difference de cette puiſſance, par exemple de x^7, ſera $= 7x^6 dx$, faite de ſon expoſant 7, multiplié par la puiſſance x^7 diminuée d'un degré, au lieu duquel on met dx. Par la même raiſon, l'on aura en général $mx^{m-1}dx$ pour la difference de x^m ; & ainſi des autres.

Suivant cela, les différences de x^5, x^4, x^3, x^2, x^1, x^0, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c. ſeront $5x^4dx$, $4x^3dx$, $3x^2dx$, $2x^1dx$, $1x^0dx = dx$, $0x^{0-1}dx = 0$, $\frac{dx}{x^2}$, $\frac{-2xdx}{x^3}$, $= \frac{-2dx}{x^3}$, $\frac{-3x^2dx}{x^4} = \frac{-3dx}{x^4}$, $\frac{-4x^3dx}{x^5} = \frac{-4dx}{x^5}$, &c. ſelon que m ſera $= 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4$, &c.

LEMMES.

LEMME I. $x^m \times x^n = x^{m+n}$. Car ſuivant l'inſtitution des expoſans m, n, des puiſſances x^m, x^n, l'on a $x^m = x$, multipliée m de fois par elle-même, & $x^n = x$, multipliée, auſſi n de fois par elle-même. Donc $x^m \times x^n = x$, multipliée $m+n$ de fois par elle-même ; & par conſequent, ſuivant la même inſtitution, l'on verra $x^m \times x^n = x^{m+n}$.

Lemme II. $x^{mn} = x^m$, élevée au degré n, ou x^n, élevée au degré m. Car 1°, $x^{mn} = x^m$, multipliée n de fois par elle-même, & conſequemment $x^{mn} = x^m \times x^m \times x^m \times x^m \times$, &c. juſqu'à n de fois $= x^{m+m+m+m+}$, &c. juſqu'à n de fois $= x^{mn}$.

2°. De même $x^{mn} = x^n$, multipliée m de fois par elle-même ; & conſequemment $x^{mn} = x^n \times x^n \times x^n \times x^n$, &c. juſqu'à m de fois $= x^{nm}$.

Lemme III. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$, puiſque (*Lem.* 1.) $x^n \times x^{m-n} = x^{n+m-n} = x^m$. D'où

COROLL. 1°. Si $m = n$, l'on aura $x^0 = \frac{m}{x^m} = 1$.

2°. Si $m = 0$, l'on aura $\frac{1}{x^m} = x^{0-n} = x^{-m}$. Ce qui fait voir qu'une puiſſance poſitive x^n en diviſeur, équivaut à elle même negative x^{-n} en multiplicateur ; & réciproquement une puiſſance négative x^{-n} en multiplicateur, équivaut à elle-même poſitive en diviſeur $\frac{1}{x^n}$.

3°. De même une puiſſance poſitive en multiplicateur, équivaut à elle-même négative en diviſeur. Par exemple $x^m = \frac{1}{x^{-m}}$; parcequ'en multipliant le tout par le diviſeur x^{-m}, l'on aura $1 = x^{m-m} = x^0 = 1$. Reciproquement une puiſſance négative x^{-m} en diviſeur, équivaut à une poſitive x^m en multiplicateur.

4°. Il ſuit des nomb. 2, 3, que pour changer un multiplicateur en diviſeur, & réciproquement un diviſeur en multiplicateur, il n'y a qu'à changer le ſigne de l'expoſant de ſa puiſſance, en le faiſant deſcendre au-deſſous de la barre dans le premier cas, & le faiſant monter au-deſſus dans le ſecond; de cette-maniere, l'on aura le $= \frac{a}{x^{-m}}$, & $\frac{a}{x^{m}} = ax^{-m}$; puiſque les diviſeurs, multipliant les quotients, donneront de part & d'autre $a = a$.

Lemme IV. Je dis que $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$. Car ſi l'on éleve chacun de ces termes à la puiſſance m, le premier deviendra x^n, & le ſecond (*Lem.* 2.) $x^{\frac{mn}{m}} = x^n$ donc effectivement $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$. Donc, &c.

Autrement $x^n = \sqrt[m]{x^n} \times \sqrt[m]{x^n} \times \sqrt[m]{x^n} \times \sqrt[m]{x^n} \times$ &c. juſqu'à m de fois $\sqrt[m]{x^n}$: De même $x^n = x^{\frac{n}{m}} \times x^{\frac{n}{m}} \times x^{\frac{n}{m}} \times x^{\frac{n}{m}} \times$, &c. juſqu'à m de fois $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{n}{m} + \frac{n}{m} + \frac{n}{m} + \frac{n}{m}} \times$, &c. juſqu'à m de fois $= x^{\frac{mn}{m}} = x^n$. donc $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$.

Suivant cela, l'on aura $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}\sqrt{}$, &c.

Page 8, ligne 18, ſur le premier Cas.

On peut encore prouver autrement que $mx^{m-1}\,dx$ eſt la difference de x^m; & le voici par la génération des puiſſances en général. En effet, puiſque x devient $\overline{x+dx}^m$, l'on aura $x^m = x + dx = x^m + mx^{m-1}\,dx + \frac{m.m-1}{1.2} x^{m-2} d^2x +$, &c. donc, puiſque $\frac{m.m-1}{1.2} x^{m-2} d^2x +$ &c. eſt infiniment petit par rapport à $mx^{m-1}\,dx$, l'on aura auſſi $x^m = x^m + mx^{m-1}\,dx$; ainſi $mx^{m-1}\,dx$ ſera la difference de x^m. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Page 9 Régle IV.

Suivant cette Régle, la difference de $\overline{ay - xx}^{p}$, ſera $= p \times \overline{ay - xx}^{p-1} \times \overline{ady - 2xdx}$.

On le peut encore prouver en ſuppoſant $ay - xx = z$, ou $\overline{ay - xx}^{p} = z^{p}$, dont la differentielle eſt $pz^{p-1}\,dz$; car reſtituant les valeurs de z, cette differentielle deviendra $= p \times \overline{ay - xx}^{p-1} \times \overline{ady - 2xdx}$, comme auparavant.

De cette façon, ſuppoſant $p = 3$, l'on aura $3 \times \overline{ay - xx}^{2} \times \overline{ady - 2xdx}$ pour la differentielle de $\overline{ay - xx}^{3}$, ainſi que l'Auteur l'a trouvé dans les Exemples qui ſuivent ſa Régle.

De même en faiſant $p = \frac{1}{2}$, l'on aura $\frac{1}{2} \times \overline{ay - xx}^{-\frac{1}{2}} \times \overline{ady - 2xdx}$, ou $\frac{ady - 2xdx}{2\sqrt{ay - xx}}$ pour la differentielle de $\overline{ay - xx}^{\frac{1}{2}}$, ou de $\sqrt{ay - xx}$; ainſi que l'Auteur l'a encore trouvé dans les mêmes Exemples.

Page 10 Art. 8.

En général, lorſqu'une formule s'eſt faite en differentiant toujours poſitivement, c'eſt-à-dire, ſans changer les ſignes; il faut auſſi differentier le lieu qu'on y veut appliquer, ſans rien changer dans les ſignes, comme ſi les grandeurs croiſſoient ou décroiſſoient toutes à même tems: & à la fin le réſultat ſera poſitif, ſi effectivement il n'y avoit rien à changer; ou négatif, s'il y avoit à changer. Ce qui s'obſerve en poſant ce qu'on cherche du côté ſuppoſé, ſi la valeur s'en trouve affirmative, ou du côté oppoſé, ſi elle eſt négative.

Digitized by Google

REMARQUES.

1°. Une grandeur ſeule, ſoit affirmative ou poſitive, ſoit négative, eſt toujours de même valeur, les ſignes + ou — ne marquant autre choſe, ſinon qu'il la faudroit ajouter ou retrancher, ſi elle étoit jointe à une autre, ſans rien changer à leur valeur. Ainſi lorſque, x, y, dx, dy, &c. ſont ſeules, elles ne ſignifient pas davantage que $-x$, $-y$, $-dx$, $-dy$, ſeules.

2°. Mais quand ces grandeurs ſont jointes à d'autres, leurs ſignes + ou —, marquant qu'il les y faut ajouter, ou qu'il les en faut retrancher, ils changent la valeur des tous ou des reſtes qui en réſultent.

Page 11, Art. 9, ligne 14.

La Courbe eſt r^egarde comme l'origine des differences; parceque c'eſt à meſure que ces differences s'approchent d'elle, qu'on les regarde diminuer. Ainſi c'eſt dans la Courbe elle-même, que ces differences deviennent $=0$, & par-delà, elles ſont négatives.

Page 11, Art. 9, ligne 22.

Voyez Wallis, in Fol. Tom. 3. pag. 692. *Putem præſtare*, &c.

Page 11, Art. 9.

REMARQUE

A examiner ſur les touchantes.

POUR trouver les touchantes d'une courbe, ſans la conſiderer comme un polygone, on les ſuppoſe d'abord comme des ſécantes qui à la fin deviennent tangentes. Pour cela, on regarde dx & dy comme des grandeurs indéterminées de quelque valeur, qu'on concevra toujours diminuer à meſure que les ordonnées communes à la Courbe, & à ſa ſécante, s'approchent juſqu'à ce qu'enfin elles ſe confondent en une; & en ce cas la ſécante TM devient tangente en M, ſi c'eſt mp *Fig. 3.*

qui s'aproche de MP immobile, ou enfin entre M & m, ſi c'eſt MP qui s'approche de mp immobile; ou enfin entre M & m, ſi ces ordonnées s'aprochent toutes deux l'une de l'autre; & en tous ces cas, chacune des grandeurs MH (dx), parallele à AP (x), & mH (dy) devient nulle. C'eſt pourquoi on rejette tous les termes où dx & dy ſe trouvent, excepté ceux qui en ſont le moins affectez, les autres n'étant que zero par rapport à eux.

Par-là on ſatisfait à un ſcrupule que voici ſur le calcul des differences. On nomme (dit-on) les abſciſſes AP, x; & les ordonnées MP, y; ce qui donne $Pp = dx$ & $Hm = dy$. On dit qu'on peut mettre $x + dx$ pour x, & $y + dy$ pour y; ce qui fait une difficulté: Car dx, dy, ſont ou quelque choſe ou zero Si on les prend pour quelque choſe, il ne ſera pas vrai de dire (comme l'on fait) que $x + dx = x$, & $y + dy = y$. Si on les prend pour zero, c'eſt un badinage que de changer x en $x + dx$, ou y en $y + dy$; & l'on ne doit tirer de $x + dx$, ou de $y + dy$, que ce que l'on tireroit de x & de y. Fig. 3.

Pour répondre à cette difficulté, l'on ne doit pas dire que $x + dx$ ſoit $= x$, ni $y + dy = y$; mais que $x + dx$, eſt une abſciſſe qui a, dans ce lieu, la même proprieté que x, & $y + dy$ la même que y: de ſorte que l'on pourra faire de $x + dx$, ou de $y + dy$, la même choſe que de x ou de y. Et parcequ'en ce cas dx & dy, ſont quelque choſe (autrement la ſeconde égalité ne ſeroit que la premiere ſans aucun changement, ce qui ſeroit badin,) toutes ces puiſſances s'en doivent conſerver, tant qu'on demeure dans cette ſuppoſition; c'eſt-à dire, tant que les ordonnées MP, mp, ſont diſtantes l'une de l'autre, quelque peu que ce ſoit; & dans tout cela MT, n'eſt encore qu'une ſécante; mais en conſiderant ces ordonnées, s'approcher juſqu'à ſe confondre enſemble, dx & dy, ceſſent d'être quelque choſe, & deviennent chacune $= 0$; c'eſt pour cela que les puiſſances s'en rejettent; & c'eſt là le cas où la ſécante devient tangente.

Page 11, Art. 9.

Remarques ſur la Formule $PT = \frac{ydx}{dy}$ *des Soutangentes.*

CEtte Formule donnant $\frac{PT}{y} = \frac{dx}{dy}$, on voit que $\frac{dx}{dy}$ exprime toujours le rapport de la ſoutangente à l'ordonnée, ce qui renferme trois cas, dont le ſecond a deux parties.

1°. Lorſque les valeurs de dx & dy, tirées de l'équation propoſée ſont toutes deux réelles au point donné de la courbe en queſtion ; ce qui eſt le cas de la preſente Section II. qui donne les tangentes concourantes avec l'un & l'autre des axes ou diametres conjugués de la courbe.

2°. Lorſque la valeur d'une de ces deux differentielles dx & dy eſt $= 0$, l'autre étant réelle, c'eſt le cas de la Section III. qui ſuit celle-ci. Si c'eſt dx qui ſoit $= 0$, cette ſect. 3. donnera les points où les tangentes ſont paralleles aux y ; & ſi c'eſt dy qui ſoit $= 0$, elle donnera les points où les tangentes ſont paralleles aux x : ce ſont les ordonnées qui paſſent par les uns & les autres de ces points que l'on appelle les *maxima* ou *minima* de la courbe ou de la queſtion.

3°. Lorſque les valeurs de dx & de dy, ſont l'une & l'autre zero dans quelque point de la courbe, c'eſt le cas de Section I X. laquelle donnant enfin la valeur de $\frac{dx}{dy}$, qui d'abord n'étoit que $\frac{0}{0}$, donne par conſequent auſſi la valeur de $\frac{PT}{y}$, c'eſt-à-dire, le rapport de la ſoutangente (PT) à l'ordonnée correſpondante (y) par le moyen de l'équation $\frac{PT}{y} = \frac{dx}{dy}$ que donne la preſente Section II. Article 9.

Page 11, & ſuiv. Art. 10.

REGLE

Pour la diſpoſition des Courbes.

SI les differences des ordonnées croiſſent ou décroiſſent avec elles, la courbe aura ſa convexité tournée du côté de ſon axe. Si au contraire, lorſque les ordonnées croiſſent, leurs differences decroiſſent, & reciproquement; la concavité de la courbe ſera tournée du côté de ſon axe. On ſuppoſe dans tout cela que les différences des abſciſſes ſont par-tout égales & conſtantes, c'eſt-à-dire, qu'en poſant les abſciſſes $=x$, les dx ſeront conſtants.

EXEMPLES.

1°. Soit le lieu $ay = xx$, dont les ordonnées ſont $=y$, & les abſciſſes $=x$, l'on aura $ady = 2xdx$; & par conſéquent $dy = \frac{2xdx}{a}$. Mais parcequ'on ſuppoſe $\frac{2dx}{a}$ conſtante, les dy ſeront comme les x. Donc ils croîtront auſſi; & par conſéquent la courbe aura ſa convexité tournée du côté de ſon axe.

2°. Si l'on prend $ax = yy$, on aura pour lors $adx = 2ydy$; & par conſéquent $\frac{adx}{2y} = dy$. Ainſi en prenant $\frac{adx}{2}$ pour conſtante, les dy ſe trouveront en raiſon réciproque des y; de ſorte que les y croiſſant, les dy décroîtront; & par conſéquent la courbe aura ici ſa concavité tournée vers ſon axe.

REMARQUE.

1°. Toutes les courbes dans les lieux deſquelles les dimenſions, tant des abſciſſes $AF(x)$, que des ordonnées $GF(y)$ ſont paires, ont toutes le contour de celle-ci $BAEACAD$ de maniere que tous ces retours ne ſe- Fig. 4.

ront qu'une même courbe, le tout pouvant être décrit par la même loi, puiſque les dimenſions paires de x ou de y, ont les mêmes ſignes que les pareilles de $-x$ ou de $-y$. 2°. Si le nombre des dimenſions eſt impair de part & d'autre, ces courbes ſeront comme BAD. 3°. Si celui des x eſt pair, & celui des y impair, la courbe ſera BAC. 4°. Au contraire, ſi celui des x eſt impair, & celui des y pair, la courbe ſera BAE.

De tout cela, il eſt viſible que toute courbe, hors le cercle, peut être rencontrée en quatre points par un cercle.

Page 12, Art. 11. 3°.

Fig. 3. des Infin. Petits. On voit de l'Analogie $dx.dy::my^{m-1}.1$. que ſuppoſant $y=o$, comme en A, 1°. Si $m>1$, l'on aura $my^{m-1}=mo=o$; & par conſéquent en ce cas, la raiſon de 1 à my^{m-1}, ou de dy à dx, ſera infiniment grande. 2°. au contraire, lorſque $m<1$, l'on aura $my^{m-1}=\frac{m}{o}$; & par conſéquent en ce cas, la raiſon de 1 à my^{m-1}, ou de dy à dx, ſera infiniment petite.

Page 16, Art. 16.

POUR trouver la courbe qu'exprime l'égalité $\frac{yy}{x}=x\sqrt{\frac{4a^4+x^4}{a^4}}$ de l'art. 16. Il faut conſiderer que cette égalité donne $y=\pm\frac{x}{a}\sqrt{\frac{1}{2}xx\pm\frac{1}{2}\sqrt{4a^4+x^4}}$, d'où réſultent ces quatre valeurs de y:

$$1°.\ y=+\frac{x}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}xx+\tfrac{1}{2}\sqrt{4a^4+x^4}}.$$
$$2°.\ y=-\frac{x}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}xx+\tfrac{1}{2}\sqrt{4a^4+x^4}}.$$
$$3°.\ y=+\frac{x}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}xx-\tfrac{1}{2}\sqrt{4a^4+x^4}}.$$
$$4°.\ y=-\frac{x}{a}\sqrt{\tfrac{1}{2}xx-\tfrac{1}{2}\sqrt{4a^4+x^4}}.$$

Dont les deux dernieres ſont imaginaires, puiſque quelque

Digitized by Google

quelque valeur qu'on donne à x, l'on aura toujours $\sqrt{4a^4 + x^4}$ plus grand que xx. Pour dans les deux autres, qui ſont réelles, x & y croiſſent toujours enſemble; ainſi la premiere étant poſitive, & la ſeconde négative, la courbe doit prendre le contour qu'on lui voit ici en EAF de part & d'autre de ſon axe AC, comme la parabole ordinaire, peut-être à quelques inflexions près que je n'ai pas le loiſir d'examiner preſentement.

Page 19, Art. 21.

PROPOSITION.

SOIT *un Triangle quelconque rectiligne* ECF, *dont* C *ſoit le ſommet & la baſe* EF, *ſur laquelle tombe* CD, *comme l'on voudra. Des points* N *d'un des côtez* CF, *pris & prolongé à diſcretion, ſoient autant de* NP *paralleles à* CD, *leſquelles rencontrent la baſe en* P, *& l'autre côté en* Q. *Soit pris enſuite ſur ces* NP *un point* M, *tel que l'on ait par-tout* $\overline{PQ}^m . \overline{PM}^m :: \overline{PM}^n . \overline{PN}^n$. *Je dis que la courbe* MM, *ſera une des ſections coniques à l'infini.* Fig. 6. & 7.

DE'MONST. A cauſe des paralleles (*hyp.*) PN, CD, l'on aura $\overline{PQ}^m . \overline{CD}^m :: \overline{EP}^m . \overline{ED}^m$. & $\overline{PN}^n . \overline{CD}^n :: \overline{PF}^n . \overline{DF}^n$. Donc en multipliant par ordre, $\overline{PQ}^m \times \overline{PN}^n . \overline{CD}^{m+n} :: \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n . \overline{ED}^m \times \overline{DF}^n$. Or (*hyp.*) $\overline{PQ}^m . \overline{PM}^m :: \overline{PM}^n . \overline{PN}^n$; & par conſéquent $\overline{PQ}^m \times \overline{PN}^n = \overline{PM}^{m+n}$. Donc $\overline{PM}^{m+n} . \overline{CD}^{m+n} :: \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n . \overline{ED}^m \times \overline{DF}^n$. ou $\overline{PM}^{m+n} . \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n :: \overline{CD}^{m+n} . \overline{ED}^m \times \overline{DF}^n$. Ainſi cette derniere raiſon étant conſtante, l'on aura par-tout $\overline{PM}^{m+n} . \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n :: \overline{PM}^{m+n} . \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n$. ou $\overline{PM}^{m+n} . \overline{PM}^{m+n} :: \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n . \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n$. Ce qui fait

un lieu à l'ellipſe (*Fig.* 6.) à l'hyperbole (*Fig.* 7.) & enfin à la parabole, en ſupoſant le point F infiniment éloigné, c'eſt-à-dire, EF & CF paralleles entr'elles; car alors on auroit les DF par tout égales entr'elles; & par conſéquent auſſi par tout $\overline{PM}^{m+n} \cdot \overline{PM}^{m+n} :: \overline{EP}^{n} \cdot \overline{EP}^{n}$. Ce qui fait le lieu aux paraboles à l'infini.

Si l'on ſuppoſe $m=1=n$, l'Analogie générale donnera par tout $\overline{PM}^{2} \cdot \overline{PM}^{2} :: EP \times PF . EP \times PF$. pour le lieu des trois Sections coniques ordinaires de la maniere qu'on le vient de trouver pour ces trois Sections en général & à l'infini.

REMARQUE EN GE'NE'RAL.

SI $\overline{CD}^{m+n} = \overline{ED}^{m} \times \overline{DF}^{n}$, la courbe MM, ſera un cercle de tous les genres (*Fig.* 6.) ou une hyperbole équilatere de tous les genres (*Fig.* 7.)

Page 22, Article 26.

PROPOSITION I.

Fig. 12 des Infiniment Petits.

SI AM *eſt une ligne droite, comme* MH, *le reſte étant comme dans la Prop. 7. je dis que la courbe* CMD, *ſera une hyperbole.*

DE'MONSTRATION.

DES points F, P, M, ſoient autant de perpendiculaires FK, PL, MN, ſur la droite KT, leſquelles la rencontrent en K, N, & HM prolongée en L. Cela fait, ſoient ces conſtantes $FK=a$, $PH=b$, $PL=c$; & les variables $KN=x$, $MN=y$. Alors on aura $LP\,(c) . MN\,(y) :: PH\,(b) . NH=\frac{by}{c}$. Donc $PN=b-\frac{by}{c}$; & par conſéquent $KP=x-b+\frac{by}{c}$. Or $KP\,(x-b+\frac{by}{c}) . PN\,(b-\frac{by}{c}) :: KF\,(a) . MN\,(y)$. Donc $xy-by+\frac{byy}{c}=ab-\frac{aby}{c}$; ce qui eſt un lieu à l'hyperbole, & *ce qu'il falloit démontrer.*

COROL. Si l'angle H étoit droit, alors MH ſe confondant avec MN, l'on auroit $PN=PH=b$, & $PL=MN=y$; ce qui feroit $KP\,(x-b) . PN\,(b) :: KF\,(a) . MN\,(y)$ Donc $ab=xy-by$; ce qui eſt encore un lieu à l'hyperbole.

Digitized by Google

PROPOSITION II.

SI AM *eſt une parabole que* PL *rencontre en* Q, *toutes choſes demeurant comme deſſus, excepté que* PA *ſera* = b, *&* PQ = c. *Je dis que la courbe* CMD, *aura pour lieu* $xy - by + \frac{byy}{cc} = ab - \frac{abyy}{cc}$.

DE'MONSTRATION.

A Cauſe de la parabole (*hyp.*) *QMA*, l'on aura $\overline{PQ}^2$ (*cc*). $\overline{MN}^2$ (*yy*) :: *PA* (*b*). *NA* = $\frac{byy}{cc}$. Donc *PN* = $b - \frac{byy}{cc}$; & par conſéquent *KP* = $x - b + \frac{byy}{cc}$. Or *KP* ($x - b + \frac{byy}{cc}$). *PN* ($b - \frac{byy}{c}$) :: *FK* (*a*). *MN* (*y*). Donc $xy - by + \frac{byyy}{cc} = ab - \frac{abyy}{cc}$, ſera le lieu de la courbe *CMD*. *Ce qu'il falloit démontrer.*

REMARQUE.

IL eſt à remarquer que cette courbe que l'Auteur appelle la compagne de la parabole, n'eſt que du troiſiême degré, quoique M. Deſcartes (*Geom. Lib.* 3.) la faſſe monter au ſixiême.

PROPOSITION III.

SI AM *eſt un cercle dont* P *ſoit le centre, il eſt viſible que* CMD *ſera la premiere conchiode dont* F *ſera le pôle.*

DE'MONSTRATION.

PArcequ'alors toutes ces *PM*, *pm*, &c. étant rayons d'un même cercle, ſeront égales entr'elles.

Pour en trouver le lieu, toutes choſes demeurant les mêmes que ci-deſſus (*Prop. II.*) l'on aura *PM* = *PA* = *b*. Donc $PN = \sqrt{bb - yy}$, & $KP = x - \sqrt{bb - yy}$. Or $KP\ (x - \sqrt{bb - yy}).\ PN\ (\sqrt{bb - yy}) :: FK\ (a).$

$MN(y)$. Donc $xy - y\sqrt{bb - yy} = a\sqrt{bb - yy}$, ou $xy = \overline{a+y} \times \sqrt{bb - yy}$, ſera le lieu de cette conchoïde.

PROPOSITION IV.

SI MA *étoit un cercle dont le rayon fût plus grand que* PA, *le lieu de la courbe* CMD, *ſeroit* $cxy - cby + cry - ab + arc = \overline{\mp a \mp y} \times \sqrt{rrcc + bbyy - 2rbyy}$, *en ſuppoſant le rayon de ce cercle* $= r$.

DE'MONSTRATION.

CAr alors on aura $\overline{LP}^2(cc).\ \overline{MN}^2(yy) :: 2rb - bb.\ 2rz - zz$, en ſuppoſant auſſi $AN = z$. Donc $2ccrz - cczz = 2rbyy - bbyy$, ou $zz - 2rz = \frac{bbyy - 2rbyy}{cc}$, ou $zz - 2rz + rr = \frac{rrcc + bbyy - 2rbyy}{cc}$; & par conſéquent $z - r = \frac{\pm\sqrt{rrcc + bbyy - 2rbyy}}{c}$ ou $z\ (NA) = \frac{rc \pm \sqrt{rrcc + bbyy - 2rbyy}}{c}$. Donc $PN = \frac{bc - rc \pm \sqrt{rrcc + bbyy - 2rbyy}}{c}$; & par conſéquent $KP = \frac{xc - bc + rc \pm \sqrt{rrcc + bbyy - 2rbyy}}{c}$. Or $KP\ (\frac{xc - bc + rc \pm \sqrt{rrcc + bbyy - 2rbyy}}{c}.\ PN)\ (\frac{bc - rc \pm \sqrt{rrcc + bbyy - 2rbyy}}{c}) :: FK(a).MN(y)$. Donc $cxy - cby + cry \mp y\sqrt{rrcc + bbyy - 2rbyy} = abc - acr \mp a\sqrt{rrcc + bbyy - 2rbyy}$, ou $cxy - cby + cry - abc + acr = \overline{\mp a \mp y} \times \sqrt{rrcc + bbyy - 2rbyy}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Et ainſi des autres courbes pour leſquelles on pourroit prendre AM.

Page 24, Art. 28.

Fig. 14 des Infiniment Petits.

SOIT la cyſſoïde FMA, ayant tiré une droite quelconque FR, qui rencontre le cercle générateur en N, ſa tangente BR en R, & la cyſſoïde en M. La nature de cette courbe eſt d'avoir par tout $RN = FM$; & par conſéquent de paſſer par le point A qui diviſe la

Digitized by Google

demi-circonference circulaire BAF en deux parties égales. Si du point A par le centre G du cercle, on mene AG qui rencontre FR en P; je dis que l'on aura $PN = PM$.

Car à cauſe des arcs égaux AB, AF, & du centre G, l'on aura non ſeulement GA parallele à la touchante BR, mais encore $BG = GF$. Donc auſſi $RP = PF$, donc en retranchant de part & d'autre des Parties (*hyp.*) égales RN, FM, il reſtera $PN = PM$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Page 26, avant l'exemple.

REMARQUE SUR LA PROPOSITION IX.

QUAND l'équation propoſée a pour indéterminées les arcs mêmes de courbes, c'eſt par les differentielles de leurs touchantes qu'il faut chercher la touchante de la courbe à laquelle elles ont rapport; parceque cette équation ne donnant que les differentielles de ces courbes, on ne ſçauroit trouver celles des ordonnées qu'on leur pourroit imaginer. Par exemple (*Fig.* 15.) les indéterminées de l'equation étant les arcs AN, CP, les differentielles qu'elle donnera, ſeront Nn, Pp, & point du tout d'autres. Ainſi en vain voudroit-on ſe ſervir des ordonnées FN, Fn, ou PM, pm; parceque leurs differentielles ne pouvant ſe trouver par l'équation donnée, elles demeureroient toujours inconnues, c'eſt-à-dire, leur rapport; & l'on n'en pourroit jamais rien tirer. Au contraire en faiſant MH, MK, paralleles aux tangentes en N, P, les differentielles Nn, Pp, donneront MO, MR, &c. comme dans cette Propoſition 9.

Fig. 15. *des Infin. Petits.*

REMARQUE

Pour les touchantes où les équations ont plus de deux indéterminées.

1°. IL faut chercher d'abord les différentielles de l'ordonnée & de l'abſciſſe, leſquelles ſont entr'elles comme cette même ordonnée & la ſoutangente qui lui répond.

2°. Il faut par de pareilles Analogies trouver la valeur des autres differentielles qui ſe trouvent dans l'équation differentiée, & ſubſtituer ces valeurs au lieu de ces differentielles, dans la valeur de la ſoutangente qu'on vient (*nom. 1.*) de trouver; & alors on aura cette ſoutangente en termes fort connus & ſans difference. Voyez la Propoſition IX, &c.

Page 33, ligne 3, après l'Exemple III.

Fig. 8. TOute courbe AMB, dont les ordonnées CD, CM, ſont perpendiculaires entr'elles, peut être auſſi regardée comme décrite par le mouvement de quelque ſtile M qui bande toujours également un fil FMH, attaché à deux foyers F & H infiniment éloignez de la courbe, ſuivant des lignes MF & MH paralleles à ſes ordonnées. En effet, de quelque point M que ce ſoit de cette courbe, comme centre, & de telle ouverture MC de compas qu'on voudra, qu'on décrive le quart de cercle CQE; ſi après avoir pris Mm infiniment petite, & fait mR parallele à MH ou DK, l'on diviſe tellement en O la corde CE de ce quart de cercle, qu'on faſſe $CO.OE :: MR.Rm$. la droite MOP ſera toujours perpendiculaire à cette courbe.

DE'MONSTRATION.

CAr ſi l'on fait ſur elle les perpendiculaires CL, EN, les triangles ſemblables CLO, & ENO, donneront $CL.EN :: CO.OE(hyp.) :: MR.Rm$. Or à cauſe que

(*conſtruct.*) $MC = ME$, l'on aura CL à EN, comme le ſinus de l'angle CMG au ſinus de l'angle EMG (*conſtruct.*) $= MGC$, c'eſt-à-dire :: $CG . CM$. Donc auſſi l'on aura pour lors $MR . Rm :: CG . CM$; & par conſéquent la droite MOP ſera perpendiculaire AMB. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Page 33, Art. 36, lig. 17.

CE n'eſt que pour la ſimplicité de la ſolution qu'on exige ici $PK = MQ$; car par quelque point de PQ qu'on tire une perpendiculaire, telle qu'eſt Ha, la choſe réuſſira. Par exemple, prolongez MR de part & d'autre juſqu'à la rencontre des tangentes PG, QH, en N, L. Soient encore $PM = a$, $MQ = b$, $MN = f$, $ML = g$, & $Op = Rm = Sq = dy$. On aura $PM(a) . MN(f) :: Op(dy) . PO = \frac{fdy}{a}$. De même $MQ(b) . ML(g) :: Sq(dy) . QS = \frac{gdy}{b}$. Donc en imaginant PX parallele à OS, l'on aura $QX = QS - PO = \frac{gdy}{b} - \frac{fdy}{a} = \frac{agdy - bfdy}{ab}$. Or $PQ(a+b) . PM(a) :: QX(\frac{agdy - bfdy}{ab} . MZ = \frac{agdy - bfdy}{ab + bb}$. Donc $MR = \frac{agdy - bfdy}{ab + bb} + \frac{fdy}{a} = \frac{aagdy - abfdy + abfdy + bbfdy}{aab + abb} = \frac{aagdy + bbfdy}{aab + abb}$. Or $Rm(dy) . MR(\frac{aagdy + bbfdy}{aab + abb}) :: PM(a) . PT(t) = \frac{aag + bbf}{ab + bb}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Fig. 25, des Infiniment Petits.

SCHOL. Si l'on ſe ſert de HK au lieu de ML, la ſolution ſera plus ſimple. Pour cela, ſoit $HK = e$; l'on aura $MQ(b) . ML(g) :: KQ(a) . KH(e)$. Ce qui donne $\frac{be}{a} = g$. De ſorte qu'en ſubſtituant cette valeur de g dans la formule précedente $\frac{aag + bbf}{ab + bb}$ (PT), l'on aura $PT = \frac{ae + bf}{a + b}$ auſſi clair & auſſi ſimple que la formule de l'Auteur.

Page 33, Art. 36. ligne 27.

LEs triangles (*hyp.*) ſemblables PQX, PMZ, donnent $PQ . PM :: QX(QS - PO) . MZ = \frac{QS - PO \times PM}{PQ}$. Donc $MR = \frac{QS - PO \times PM}{PQ} + PO = \frac{QS \times PM - PO \times PM + PO \times PQ}{PQ}$ = (à cauſe de $PQ - PM = QM$) $= \frac{QS \times PM + PO \times QM}{PQ}$.

Digitized by Google

Page 33, Article 36, après la derniere ligne.

AUTRE SOLUTION DE CE PROBLÊME.

Fig. 9. LA génération de la courbe CMD, demeurant la même, &c. Soit une droite quelconque HV parallele à PQ, laquelle rencontre en K, N, V, les perpendiculaires OP, RM, SQ, prolongées juſqu'à elle, & en H, L, T, les touchantes PH, ML, QT, des courbes APB, CMD, EQF. Il s'agit donc de trouver la touchante LM de la courbe CMD.

Soit $PM=a$, $MQ=b$, $PQ=c$, PK ou MN, ou $VQ=f$, $HK=h$, $TV=l$, Op ou Rm ou $Sq=dy$. On aura $HK(h).KP(f)::Op(dy).PO=\frac{fdy}{h}.TV(l).VQ(f)::Sq(dy).QS=\frac{fdy}{l}$. Donc $QX=\frac{fdy}{l}-\frac{fdy}{h}=\frac{hfdy-lfdy}{hl}$. Or $QP(c).PM(a)::QX(\frac{hfdy-lfdy}{hl}.MZ=\frac{ahfdy-alfdy}{chl}$, & $MR=\frac{a'fdy-alfdy}{chl}+\frac{fdy}{h}=\frac{ahfdy-aflfdy+cflfdy}{chl}$ (à cauſe de $c-a=PQ-PM=MQ=b$) $=\frac{ahfdy+bflfdy}{chl}$. Or $MR(\frac{ahfdy+bflfdy}{chl}).Rm(dy)::MN(f).LN=\frac{chl}{ah+bl}$ *Ce qu'il falloit trouver.*

Page 35 ſur l'Exemple II. Art. 39.

POUR voir que lorſque FQ eſt une hyperbole, & $ADNP$ un parallelogramme, dont le côté AD eſt moyen proportionnel entre AE, EF, ou AG, GQ; la courbe LMm eſt une logarithmique dont la ſoutangente $PT=AD$.

Il faut conſidérer que puiſque (*hyp.*) les eſpaces $EFQG=ADNP$, leurs différences $GQqg=NPpn$; & par conſéquent $GQ.NP(AD)::Pp(MR).Gg(Rm)::TP.PM$. Or (*hyp.*) $GQ.AD::AD.AG(PM)$. Donc $AD.PM::TP.PM$; c'eſt-à-dire, la ſoutangente $TP=AD$ conſtante; & par conſéquent la courbe LMm eſt une logorithmique.

On voit de-là, que pour décrire telle logarithmique qu'on voudra, c'eſt-à-dire, dont la ſoutangente ſoit telle

telle qu'on voudra: par exemple, égale à AD prise à discrétion. 1°. Il faut prendre encore AE à discrétion, & EF troisiéme proportionnelle à AE, AD. 2°. Entre les asymptotes AC, AE (dont les angles sont ici droits) décrire par le point F l'hyperbole $F\mathcal{Q}$. 3°. Faire telle ordonnée $G\mathcal{Q}$ qu'on voudra, & le parallelograme $ADNP = EG\mathcal{Q}F$. On voit, dis-je, par la démonstration précedente que le point M, dans lequel $\mathcal{Q}G$ & NP, prolongées se rencontrent, sera un de ceux de la logarithmique cherchée.

Quant à la quadrature de l'espace logarithmique $ZPMZ$, rien n'est plus facile à trouver. Car puisque $-Rm . RM :: PM . PT$, l'on aura $-PT \times Rm = PM \times RM = MPpm$. Donc en integrant, l'on aura $-PT \times PM = -SMPpm = ZPMZ$, & non $PMEA$, à cause que cette valeur est négative.

L'on aura de même $PT \times AE = ZAEZ$; & par conséquent $PAEM = PT \times AE - PT \times PM = PT \times GE$.

Il est à remarquer que puisque DA ou PT est moyenne proportionnelle entre AG, $G\mathcal{Q}$, & que les ordonnées logarithmiques donnent PA, AG, il est visible que l'on auroit, 1°, le point $\mathcal{Q}$, & par conséquent l'hyperbole $F\mathcal{Q}$. 2°. L'espace hyperbolique $EF\mathcal{Q}G = ADNP$, c'est à-dire, la quadrature de cette hyperbole, que la description de la logarithmique suppose.

Comme cette hyperbole $F\mathcal{Q}$ sert à décrire la logarithmique EMZ de la maniere qu'on vient de voir, elle en sera d'orénavant appellée *l'hyperbole génératrice*.

A

PROBLEME.

La Logarithmique E M Z *étant donnée ſeulement de poſition par rapport à ſon aſymptote* A Z, *trouver la valeur de ſa ſoutangente* P T *avec ſon hyperbole génératrice* F Q.

SOLUTION.

Figure 11. AYANT fait une hyperbole équilatere quelconque XB entre les Aſymptotes AE, AC, avec EX parallele à AC, & qui rencontre cette hyperbole en X; ſoit le parallelograme $AEXC$ avec une infinité d'ordonnées PM, RL, SH, &c. à la logarithmique, leſquelles ſoient également diſtantes entr'elles, & qui rencontrent EX prolongée en π, λ, β, &c. Des points M, L, H, &c, où elles rencontrent la logarithmique EMZ, ſoient tirées MB, LD, HN, &c. qui rencontrent, 1°. AE en G, O, K, &c. 2°. XC en μ V Y, &c. 3°. L'hyperbole XB en B, D, N, &c.

Cela fait, il eſt viſible par la nature de la logarithmique, que AE, SH, RL, &c. ſont en progreſſion geometrique continue, & que leurs différences EK, KO, OG, &c. ſuivent auſſi la même progreſſion. Donc

1°. $EK . EA :: KO : SH :: OG . RL$. &c. ou (ce qui revient au même) $EY . ES :: KV . HR :: O\mu . LP$. &c. Et par ainſi $EY . ES :: EX\mu G$ ($EX \times GE$) . $AEPM$ ($GE \times PT$).

2°. Puiſque EK, KO, OG, &c. ſont en progreſſion geometrique, les eſpaces hyperboliques EN, KD, OB, &c. ſont égaux entr'eux, auſſi bien que (*conſtr.*) ES ou $A\beta$, $S\lambda$, $R\pi$, &c. ce qui donne encore EY ou $EKNX$. ES ou $A\beta :: EGBX . EAP\pi$ ($EA \times AP$).

Donc $EGBX . EA \times AP :: EX \times GE . GE \times PT :: EX . PT$; & par conſéquent $\frac{EA \times AP \times EX}{EG - BX} = PT$. *Ce qu'il falloit*, 1°, *trouver.*

Soit enſuite priſe EF troiſiême proportionnelle à AE, PT; ou $G\mathcal{Q}$ troiſiême proportionnelle à AG, PT. Si

par le point F ou Q, on décrit l'hyperbole FQ, on voit par la génération de la page précédente, que cette hyperbole ſera la génératrice de la logarithmique propoſée. *Ce qu'il falloit*, 2°, *trouver.*

On voit que tout cela ne dépend que de la quadrature d'une hyperbole quelconque XB entre les aſymptotes AE, AC.

Page 36 ſur l'Exemple II. Article 42.

SOIENT $CE = y$ les ordonnées de la ſpirale logarithmique AEC, du centre C de laquelle & d'un rayon quelconque $AC = r$ ſoit décrit le cercle AFB, dont les parties infiniment petites $Bb = dx$. Si l'on prend a & m pour des grandeurs quelconques données, la nature de cette ſpirale ſera exprimée par $a^x = y^m$; parceque les x (AFB) ou les angles qu'elles meſurent, croiſſant arithmétiquement, les a^x, & par conſequent auſſi les y^m ou les y croiſſent geométriquement. *Fig.* 12.

Pour trouver preſentement la touchante ET de cette ſpirale, le calcul exponentiel ci-après changera $a^x = y^m$ en $xla = mly$ (L eſt la caracteriſtique des logarithmes; de ſorte que la, ly, &c. ſont les logarithmes de a, y, &c.) Et en differentiant à l'ordinaire, l'on aura $ladx = mdly = \frac{mdy}{y}$. Or en faiſant deux rayons CB, Cb, infiniment proches, leſquels rencontrent la ſpirale en E, e; & faiſant enſuite du centre C, l'arc $ED = dz$, avec CT perpendiculaire ſur EC, l'on aura $EC(y).BC(r)::ED(dz).Bb(dx) = \frac{rdz}{y}$. Donc en ſubſtituant cette valeur de dx dans l'égalité précédente, l'on aura $\frac{rladz}{y} = \frac{mdy}{y}$ où $rladz = mdy$; ce qui donne $rla.m::dy(eD).dz(ED)::EC(y).CT = \frac{my}{rla}$. D'où l'on voit que les ſoutangentes (CT) croiſſent ici comme les ordonnées (EC) correſpondantes; & qu'ainſi les triangles rectangles ECT ou eDE, ſont par tout ſemblables, & les angles en E par tout égaux.

COROLLAIRE.

ON voit auſſi qu'en faiſant AC, EC infinies en ſupoſant le point C infiniment éloigné; ayant alors $r = y$, cette ſpirale deviendra une logarithmique ordinaire, dont la ſoutangente($\frac{my}{ya}$) ſera $= \frac{m}{La}$, c'eſt-à-dire, conſtante, & par tout la même : ſon aſymptote ſera la perpendiculaire en C ſur la droite AC.

M. Varignon ajoute ici: J'ai donné toute cette page à M. Ozanan, *c'eſt-à-dire, tout cet Eclairciſſement ſur l'Article 42 de la Section II.*

A la fin de la page 40 ou de la Section II.

PROBLEME.

Fig. 13. *UNe courbe quelconque* AED *étant donnée, en trouver une autre auſſi quelconque* CEF *d'eſpece donnée qui touche celle-là en un point donné* E.

SOLUTION.

SOIENT $AB = x$, $CB = v$ les abſciſſes de ces courbes, & $EB = y$ leur ordonnée commune. Il eſt viſible que l'on aura $dx = eG = dv$; & par conſequent auſſi les valeurs de dx & de dv trouvées par le moyen de l'équation donnée de AED, & de la ſupoſée de CEF, donneront une nouvelle équation, dans laquelle il n'y aura d'inconnu que l'abſciſſe CB (v) & le parametre de la courbe cherchée CEF; ce qui ſe trouvera par le moyen des deux autres équations comparées avec celle-ci.

EXEMPLE.

SOIT $ax = yy$ l'équation donnée de la courbe AED, & $2rv - vv = yy$ l'équation ſupoſée de la courbe cherchée CEF. Leur differentiation donnera $adx = 2ydy = 2rdv - 2vdv$, ou (à cauſe de $dx = dv$) $a = 2r - 2v$, ou bien encore $v = r - \frac{1}{2}a$. Mais les deux premieres équations donnant $ax = 2rv - vv$, l'on aura auſſi $ax = 2rr$

$-ar-rr+ar-\frac{1}{4}aa=rr-\frac{1}{4}aa$; d'où reſulte $r=\pm\sqrt{ax+\frac{1}{4}aa}$; & de là auſſi $v\,(r-\frac{1}{2}a)=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{ar+\frac{1}{4}aa}$: dans leſquelles valeurs x & a étant données, l'on aura auſſi celles de r & de $v\,(CB)$; c'eſt-à-dire, l'origine C du cercle cherché CEF, avec ſon rayon $CO=\pm\sqrt{ax+\frac{1}{2}a}$; & ainſi des autres courbes.

Page 41, Section III. ſur la Définition premiere.

DE cette Définition il ſuit, 1°, que lorſque les appliquées d'une courbe croiſſent juſqu'à l'infini, cette courbe n'a point de *maxima*, à moins que ce ne ſoit celle de ſes appliquées qui devient ainſi infinie. 2°. Que lorſque les appliquées décroiſſent juſqu'à zero, la courbe n'a point non plus d'autre *minimum* que zero. 3°. Si les appliquées croiſſent juſqu'à devenir infinies ſans diminuer juſqu'à zero, la courbe a toujours un ou pluſieurs *minima*, mais point de *maxima*. 4°. Au contraire lorſqu'elles décroiſſent juſqu'à zero, ſans croître juſqu'à l'infini, cette courbe a toujours un ou pluſieurs *maxima*, mais point de *minima*. 5°. Enfin, lorſque les appliquées ni ne croiſſent juſqu'à l'infini, ni ne décroiſſent juſqu'à zero, la courbe a toujours quelque *maxima* & *minima* tout à la fois.

Page 42, ſur l'Exemple I. Art. 48.

SOIT l'égalité $(A)\ y^3+x^3=axy$ de la courbe $AM\mu mA$, dont l'axe étant $AB=a$, les abſciſſes ſoient $AP=x$, & les ordonnées $PM=y$. L'on aura $(B)\ dy=\frac{aydx-3xxdx}{3yy-ax}$. Donc *Fig. 14.*

1°. Si l'on fait $dy=o$, l'on aura $ay-3xx=o$, ou $y\,(MP)=\frac{3xx}{a}$; ce qui étant ſubſtitué dans l'égalité A, donne $x\,(AP)=\frac{a}{3}\sqrt[3]{2}$.

2°. Si l'on fait $dy=$ infin. ou $dx=o$, l'on aura de même $3yy-ax=o$, ou $y\,(\mu\pi)\sqrt{\frac{ax}{3}}$; ce qui étant encore ſubſtitué dans l'égalité A, donne $x\,(A\pi)=\frac{2a}{3}$.

Page 43, ſur l'Exemple II. Article 49.

POUR trouver le plus grand ou le plus petit y de l'égalité propoſée $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$, on voit que l'Auteur la différentie immédiatement ſans faire évanouir les ſignes radicaux ; ce qui lui donne $dy = \frac{-2a^{\frac{1}{3}}dx}{3\times\overline{a-x}^{\frac{1}{3}}}$, laquelle valeur de dy, égalée à zero, ne donne que $2a^{\frac{1}{3}}dx = o$, qu'il dit ne donner rien. C'eſt pour cela que l'Auteur l'égale à l'infini ; ce qui lui donne $3 \times \overline{a - x}^{\frac{1}{3}} = o$, ou $x = a$. Il eſt pourtant à remarquer que $dy = o$, donnant $2a^{\frac{1}{3}}dx = o$, ne le donne que par raport à $3\times\overline{a-x}^{\frac{1}{3}}$ infini par rapport à $2a^{\frac{1}{3}}dx$; ce qui rend x infinie, & conſéquemment auſſi y infinie, change l'équation donnée en $y = a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$ ou $y^3 = axx$; d'où réſulte $x = \pm \sqrt[3]{\frac{y^3}{a}}$, & conſéquemment deux *maxima* infinis PM (y).

Il paroît cependant qu'en faiſant évanouir les ſignes radicaux de l'égalité propoſée $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a-x}^{\frac{2}{3}}$ avant que de la différentier, il en réſultera une valeur de dy, laquelle égalée à zero, donne encore $x = a$; car en faiſant évanouir les ſignes radicaux, cette égalité devient $y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a^3 - 2aax + axx$; ce qui donne $3yydy - 6aydy + 3aady = 2aadx + 2axdx$. Et par conſéquent $dy = \frac{2axdx - 2aadx}{3yy - 6ay + 3aa}$, laquelle valeur de dy, égalée à zero, donne $2axdx - 2aadx = o$; & par ainſi encore $x = a$, c'eſt-à-dire, la même que ci-deſſus, qu'on égaloit à l'infini. Comment accorder cela ?

Pour l'accorder, il faut remarquer que cette derniere valeur de dy ; ſçavoir $dy = \frac{2axdx - 2aadx}{3yy - 6ay + 3aa}$, a pour diviſeur commun de l'un & de l'autre de ſes termes, $a^{\frac{2}{3}} \times$

$\overline{a-x}^{\frac{3}{3}}$. Car en ſubſtituant la valeur de y, que donne l'égalité propoſée $y-a=a^{\frac{1}{3}}\times\overline{a-x}^{\frac{2}{3}}$ ou $y=a^{\frac{1}{3}}\times\overline{a-x}^{\frac{2}{3}}+a$, l'on aura $3yy-6ay+3aa=3a^{\frac{2}{3}}\times\overline{a-x}^{\frac{4}{3}}$; & par conſéquent $dy=\frac{2axdx-2aadx}{3a^{\frac{2}{3}}\times\overline{a-x}^{\frac{4}{3}}}=\frac{-2a^{\frac{1}{3}}\times\overline{a-x}^{\frac{1}{3}}\times dx}{3a^{\frac{2}{3}}\times\overline{a-x}^{\frac{4}{3}}}=\frac{-2a^{\frac{1}{3}}dx}{3\times\overline{a-x}^{\frac{1}{3}}}$, qui ne donne ED qu'en le faiſant égal à l'infini.

Ainſi ſi $dy=\frac{2axdx-2aadx}{3yy-6ay+3aa}$ donne quelque choſe en l'égalant à zero, ce n'eſt que ce que donneroit $dy=\frac{-2a^{\frac{1}{3}}dx}{3\times a-x^{\frac{1}{3}}}$, ſi après avoir multiplié l'un & l'autre terme de cette fraction par $a-x$ ou $\overline{a-x}^{\frac{3}{3}}$, on l'égaloit à zero; ce qui ne donneroit pas davantage qu'avant cette multiplication: autrement la valeur de x deviendroit arbitraire, puiſque le tout ſe peut multiplier de même par $a-px$, ce qui (en l'égalant à zero) donneroit $a=px$. D'où l'on voit que cette découverte ſeroit plûtôt une ſuite de ce multiplicateur commun, égalé à zero, que de la valeur de dy, égalée de même à zero.

Il eſt viſible que $y-a=a^{\frac{1}{3}}\times\overline{a-x}^{\frac{2}{3}}$, eſt une équation à une ſeconde parabole cubique; puiſqu'en faiſant $y-a=z$, & $a-x=v$, l'on aura $z=a^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}$, ou $z^3=avv$.

Pour la conſtruction de cette parabole ſoit le quarré $ABCD$, dont le côté $AB=a$, $BF=x$, $EG=y$. Alors on aura $AF=a-x=v$, & $FG=y-a=z$; ainſi ſi l'on fait ſur l'axe AK une ſeconde parabole cubique AGH, dont l'équation ſoit $AB\times\overline{AF}^{2}=\overline{FG}^{3}$, Fig. 15.

elle donnera auſſi $avv = z^3$, ou $a \times \overline{a-x}^2 = \overline{y-a}^3$, ou enfin $a^{\frac{1}{3}} \times a - x^{\frac{2}{3}} = y - a$ qui eſt l'équation propoſée.

Si au lieu de prendre AB pour l'axe on prend CD, l'on aura $CE = x$ dont C ſera l'origine, & $EG = y$, lequel en D deviendra un *minimum* $= AD = a$, & alors $CE\ (x)$ ſera auſſi $= CD = a$, conformément à ce qu'on vient de trouver.

PROBLEME

TROUVER une plus grande dans une courbe rebrouſſante, comme page 165 des Infiniment Petits.

PROBLEME.

Fig. 16. TROUVER les *maxima* ou *minima* de la courbe FBf exprimée par l'équation $xx + 2nn = n\sqrt{ny - nn} + n\sqrt{ny - 2nn}$.

SOLUTION.

1°. CETTE équation différentiée donnera $2xdx = \frac{nn\,dy}{2\sqrt{ny-2nn}} + \frac{n\,n\,dy}{2\sqrt{ny-2nn}}$ (pour abreger ſoit $z = \frac{nn}{2\sqrt{ny-nn}} + \frac{nn}{2\sqrt{ny-2nn}} = z\,dy$. Donc $\frac{dx}{dy} = \frac{z}{2x}$; donc en faiſant $dy = o$ par rapport à dx, l'on aura auſſi $x = o$; mais l'égalité propoſée donne $x = \pm\sqrt{-2nn + n\sqrt{ny-nn} + n\sqrt{ny-2nn}}$; donc cette valeur de x eſt auſſi pour lors $= o$; & par conſéquent auſſi $2n = \sqrt{ny-nn} + \sqrt{ny-2nn}$, ou $4nn = 2ny - 3nn + 2\sqrt{nnyy - 3n^3y + 2n^4}$, ou bien auſſi $7nn - 2ny = 2\sqrt{nnyy - 3n^3y + 2n^4}$; donc $49n^4 - 28n^3y + 4nnyy = 4nnyy - 12n^3y + 8n^4$; ce qui ſe reduit à $41n^4 - 16n^3y = o$, ou $y = \frac{41}{16} \times n$. Voilà pour le *minimum* (y) qui répond à une tangente parallele aux x; & ce qui fait voir en même temps qu'il n'y en a point d'autre, ni aucun *maximum* qui réponde à de telles paralleles aux x.

2°. Pour

2°. Pour voir preſentement s'il n'y en a point qui répondent à des tangentes paralleles aux y, il faut faire $dx = o$ par rapport à dy dans la differentielle $2xdx = \frac{nndy}{2\sqrt{ny-nn}} + \frac{nndy}{2\sqrt{ny-2nn}} = \frac{ndy\sqrt{ny-2nn}+ndy\sqrt{ny-nn}}{2\sqrt{yy-3ny+2nn}}$; ce qui rend cette fraction $\frac{n\sqrt{ny-2nn}+n\sqrt{ny-nn}}{2\sqrt{yy-3ny+2nn}} = o$; & par conſéquent auſſi $\sqrt{ny-2nn}+\sqrt{ny-nn} = o$. Ce qui donneroit alors $2nn = nn$ ou $2 = 1$; ce qui eſt contradictoire: donc la courbe n'a ni *maxima*, ni *minima* qui répondent à des paralleles aux y, & *le minimum* $AB(y) = \frac{41}{16}n$ qui répond à une tangente parallele aux x, eſt l'unique qu'elle ait.

3°. Il eſt à remarquer que la précedente differentielle $2xdx = \frac{ndy\sqrt{ny-2nn}+ndy\sqrt{ny-nn}}{2\sqrt{yy-3ny+2nn}}$, donnant auſſi $dy = \frac{4xdx\sqrt{yy-3ny+2nn}}{n\sqrt{ny-2nn}+n\sqrt{ny-nn}}$, la ſuppoſition premiere de $dy = o$, auroit auſſi donné $4x\sqrt{yy-3ny+2nn} = o$; & par conſéquent auſſi $x = o$, ou $\sqrt{yy-3ny+2nn} = o$, ou tous les deux enſemble: la queſtion eſt de ſçavoir lequel des trois eſt le vrai. Je dis que c'eſt $x = o$ qu'il faut prendre; parceque la differentielle primitive & immédiate $2xdx = \frac{nndy}{2\sqrt{ny-nn}} + \frac{nndy}{2\sqrt{ny-2nn}}$ de l'égalité $xx+2nn = n\sqrt{ny-nn}+n\sqrt{ny-2nn}$ donne $dy.dx :: 2x.\frac{nn}{2\sqrt{ny-nn}}+\frac{nn}{2\sqrt{ny-2nn}}$. Donc dans le premier cas de $dy = o$, c'eſt x qui eſt $= o$, & non $\sqrt{yy-3ny+2nn}$

dans le produit $4x\sqrt{yy - 3ny + 2nn}$, qu'on vient de voir être $= o$.

Telle eſt la maniere de diſcerner laquelle de ces deux racines $4x$, ou $\sqrt{yy - 3ny + 2nn}$, le rend $= o$, étant elle même $= o$

C'eſt là préciſément que ſe méprit M. l'Abbé Galois le Samedi 7 Mars 1706, qu'il propoſa à l'Académie l'équation dont il s'agit ici pour en trouver par le moyen de l'Analyſe des Infiniment Petits, les *maxima* & *minima*, diſant qu'elle ne lui donnoit pour cela que des imaginaires & des contradictions ; mais on voit que c'étoit ſa faute, & non celle de cette Analyſe qui nous vient de donner tout ce qu'en a la courbe exprimée par cette équation ; & cette faute de Monſieur l'Abbé Galois venoit d'avoir pris $\sqrt{yy - 3ny + 2nn} = o$, au lieu de $x = o$, dans le produit $4x\sqrt{yy - 3ny + 2nn}$, que le cas de $dy = o$ rendoit auſſi $= o$. Cette remarque pourra peut-être avoir lieu dans d'autres occaſions où il s'agiroit de ſçavoir laquelle des racines d'un produit $= o$, doit auſſi être faite $= o$.

Page 45. Exemple V. Article 52, ligne 12.

L'Egalité $y = \frac{aac + acx - aax - axx}{bx - xx}$, donne la différentielle $dy = \frac{acxx - abxx - aaxx + 2aacx - aabc}{\overline{bx - xx}^2} \times dx$. Donc

1°. Si l'on fait $dy = o$, l'on aura $acxx - abxx - aaxx + 2aacx - aabc = o$, ou $xx + \frac{2acx}{c-b-a} = \frac{abc}{c-b-a}$; ce qui donne $x = \frac{-ac \pm \sqrt{aac + ab - bcc - abc - aac}}{c-b-a}$.

2°. Si l'on fait $dy =$ infini ou $dy = o$, l'on aura auſſi $bx - xx = o$, ou $x = \begin{cases} b \\ o \end{cases}$.

Il faut chercher la courbe exprimée par la premiere égalité.

Page 46, ligne 18, Article 53.

L'Egalité $y = \frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a}$ donne $dy = \frac{2axdx - 3axxdx}{2a\sqrt{aa - ax}} = \frac{2adx - 3xdx}{2\sqrt{aa - ax}}$. Donc:

1°. Si l'on fait $dy = o$, l'on aura $2a - 3x = o$, ou $x = \frac{2a}{3}$; ce qui ſubſtitué dans l'egalité propoſée, donne $y = 2a\sqrt{\frac{1}{27}}$.

2°. Si l'on fait $dy =$ infin. ou $dx = o$, l'on aura $\sqrt{aa - ax} = o$, ou $x = a$; ce qui ſubſtitué dans l'égalité propoſée, donne $y = o$.

Page 49. Exemple X. Art. 58, ligne 13.

POUR prouver que les triangles HDE & KLE ſont ſemblables, il faut conſiderer que les angles CEG & FEG étant égaux, l'on aura auſſi les angles $ECO + EOC = EFO + EOF$, c'eſt-à-dire, (*hyp.*) $HEO + HOE = KEO + KOE$. Or à cauſe du parallelogramme DL, l'on aura auſſi $DEO + HOE = LEO + KOE$. Donc en retranchant les angles précedens de ceux-ci, il reſtera $DEH = LEK$. De plus les angles D & L ſont égaux; donc les triangles HDE & KLE ſont ſemblables. *Ce qu'il falloit démontrer.* *Fig. 42 des Infin. Petits.*

Page 51, Exemple XII, Article 60, ligne 5.

EN géneral & dans quelque ligne que les points C, B, ſoient ſituez, ſoient encore $CF = a$, $DFB = b$, $CE = x$ de plus $CG = c$, $CB = m$, $BG = n$; & le reſte comme dans l'Article 60, & la Fig. 44 des Infin. Petits. *Figure 17.*

L'on aura $EF = \sqrt{aa - xx}$, & $BF\left(\sqrt{\overline{\frac{1}{EG}}^2 + \overline{EF + BG}^2}\right) = \sqrt{cc - 2cx + xx + aa - xx + nn + 2n\sqrt{aa - xx}}$; donc

$FD = b - \sqrt{mm - 2cx + aa + 2n\sqrt{aa - xx}}$; & par conſéquent $ED = b + \sqrt{aa - xx} - \sqrt{mm - 2cx + aa + 2n\sqrt{aa - xx}}$ qui doit être un plus grand. Ainſi ſa différence

$$\frac{-xdx}{\sqrt{aa - xx}} + \frac{cdx\sqrt{aa - xx} + nxdx}{\sqrt{aa - xx} \times \sqrt{mm - 2cx + aa + 2n\sqrt{aa - xx}}} = 0.$$

Et par conſéquent $xdx\sqrt{mm - 2cx + aa + 2n\sqrt{aa - xx}} = cdx\sqrt{aa - xx} + nxdx$. Donc en quarrant & en réduiſant le tout, il viendra $2nxx - 2cnx \times \sqrt{aa - xx} = 2cx^3 - ccxx - aaxx + aacc + nnxx - mmxx$ (à cauſe de $cc = mm - nn$) $= 2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc$. Et en diviſant le tout par $x - c$, l'on aura $2nx\sqrt{aa - xx} = 2cxx - aax - aac$. Enfin en quarrant le tout, il viendra l'égalité $4mmx^4 - 4aacx^3 + a^4x^2 + 2a^4cx + a^4cc = 0$, $-4a^2m^2x^2$ dont une des racines fournit pour CE une valeur telle que la perpendiculaire ED paſſe par la poulie F, & le plomb D, lorſqu'ils ſont en repos.

Il eſt viſible que ſi CB étoit horizontale ou BG (n) $= 0$, alors on auroit $CB = CG$ ou $m = c$; ce qui réduiroit cette égalité à $4ccx^4 - 4aacx^3 + a^4x^2 + 2a^4cx + a^4cc = 0$, $-4a^2c^2x^2$ dont la racine quarrée ſeroit $2cxx - aax - aac = 0$, qui eſt la même que celle de la page 52 de l'Analyſe des Infiniment Petits.

Page 52, ligne 5, Article 60.

AUTREMENT.

Figure 17. IL eſt viſible qu'en cas d'équilibre, l'on aura les angles $CFD = CFB$. Soit $CHF = CFD$; donc l'angle $KHF = KFC$. De plus l'angle CKF eſt commun aux triangles KHF & KFC ; ainſi ces triangles ſont ſembla-

bles, de même que HFC, FBC. Donc $CB(m).CF(a)::CF(a).CH=\frac{aa}{m}$. Et appellant $CK=v$, $KF=z$, l'on aura auſſi $CK(v).KF(z)::KF(z).HK(v-\frac{aa}{m}$. Donc $vv-\frac{aavv}{m}=zz$.

Pour changer préſentement les indéterminées v & z en x, il faut dire $BC(m).CK(v)::BG(n).KE=\frac{vn}{m}::CG(c).CE(x)=\frac{cv}{m}$. Donc $v=\frac{mx}{c}$.

De plus $EF(\sqrt{\frac{-2}{CF}-\frac{-2}{CE}})=\sqrt{aa-xx}$. Donc $KF(z)=\frac{nv}{m}+\sqrt{aa-xx}$ (à cauſe de $v=\frac{mx}{c}$) $=\frac{nx}{c}+\sqrt{aa-xx}$, ou $\frac{nnxx}{cc}+\frac{2nx}{c}\sqrt{aa-xx}+aa-xx=zz=vv-\frac{aavv}{m}=\frac{mmxx}{cc}-\frac{aax}{c}$, ou $nnxx-mmxx+aacc-ccxx+aacx=-2ncx\sqrt{aa-xx}$, ou (en ſubſtituant $c^2=m^2-n^2$, & diviſant enſuite le tout par c) $aac-2cxx+aax=-2nx\sqrt{aa-xx}$; & en quarrant, $a^4cc-4aaccxx+4ccx^4+2a^4xc-4aacx^3+a^4xx=4aannxx-4nnx^4$ Donc en ſubſtituant $mm=cc+nn$, l'on aura $4m^2x^4-4aacx^3+a^4xx+2a^4cx+a^4c^2=0$, qui eſt la même égalité que ci-deſſus, page précédente ligne 19.

$-4a^2m^2xx$

Page 55, Avertiſſement, ligne 7.

Ainſi ddy exprimera Hn; $dddy$, $Lo-Hn$, ou $Hn-Lo$, &c.

Page 57, Corollaire II, Article 64, ligne 4.

La petite droite Mm, c'eſt-à-dire la touchante Mm.

Page 57, Corollaire II, Article 64, ligne 10.

Cela revient à la définition premiere de la Section IV. page 55 de l'Analyſe des Infiniment Petits, parceque MR & mS, étant (*hyp.*) paralleles & égales, la droite RS tirée par R & S, ſe trouveroit parallele à mH; ainſi (ſelon la définition premiere pag. 55, de l'Analyſe des Infiniment Petits) Hn ſeroit la différence des grandeurs mR, SH qui ſeroient alors égales: mais indépendemment de

Fig. 46 des Infin. Petits. cette definition. Les triangles MRm & mSH étant semblables, & leurs bases MR & mS égales, c'eſt une conſéquence neceſſaire que Rm ſoit $= SH$, & qu'ainſi Hn en ſoit la difference.

Page 58, ligne 5, Corollaire II. Art. 64, 2°.

Fig. 50 & 51 des Infin. Petits. L'Auteur prend MR, mS égales entr'elles pour des dx conſtantes, afin d'avoir les differentielles de dy, dv, c'eſt à-dire, pour avoir ddy, ddv. Dans la pratique j'aimerois mieux prendre ſur un cercle quelconque décrit du centre B, des differentielles égales qui feroient des dx conſtantes; & de là viendroient MR, mS, par proportion.

REMARQUE.

Fig. 18. & 19. QUand les différences ſecondes des y ſont du même coté de la courbe que les differences premieres, elles ſont poſitives: ſi elles ſont du côté oppoſé, elles ſont négatives. Par exemple (*Figure* 18.) les Bb (dx) étant conſtantes, l'on aura gr (dy) $= SR$; ainſi SG ſera la différence de gr (dy) à GR (dy): mais parceque cette ſeconde différence SG (ddy) eſt du même côté de la courbe que les premieres GR, gr, elle ſera poſitive. Au contraire (*Figure 19.*) SG (ddy) ſe trouvant dans cette ſeconde Figure de l'autre côté de la courbe par rapport à RG (dy), elle ſera négative.

Page 58, ligne 15, Art. 64, 2°.

Donc l'angle $fmH = RMm$.

Fig. 50 & 51. des Infin. Petits. Cela ſe peut encore prouver autrement en prolongeant mE & Bn juſqu'à ce qu'elles concourent en L; & en faiſant LO parallele à Bm. Car l'angle mHS étant exterieur par rapport au triangle mHL, l'on aura cet angle $mHS = HmL + mLH$ (*hyp.*) $= mBL + mLH =$ (à cauſe de mB & LO paralleles) $= BLO + mLH = OLm = OLM = MmR$. Ainſi les angles S & R étant (*hyp.*)

droits, l'on aura auſſi l'angle $HmS = mMR$, & ces trian. gles ſemblables. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Page 59 ligne derniere, après la définition II.

Ci-après, Art. 109, il y a encore une autre eſpece de rebrouſſement.

Page 60, Article 66 ligne 10.

Examinez ci-aprés l'article 191, il pourra peut-être ſervir à reconnoître ſi c'eſt un point d'inflexion ou de rebrouſſement.

Page 60, Article 66, ligne 11. 1°. Dans les courbes, &c.

1°. LOrſque F eſt un point d'infléxion, on trouve que AL eſt *un plus grand*; & par conſéquent ſa differentielle $M = 0$. *Fig. 52, 53 des Infin. Petits.*

2°. Lorſque F eſt un point de rebrouſſement, c'eſt AE qui eſt *un plus grand*, & par conſéquent auſſi ſa différentielle eſt $= 0$; (ou ce qui revient au même) la différentielle de AL ſe trouve alors infinie par rapport à elle de AE.

c Donc pour avoir le point F d'infléxion ou de rebrouſſement, il faut toujours faire la différentielle de AL égale à zero ou à l'infini; égale à zero pour le point d'infléxion, & égale à l'infini pour le point de rebrouſſement.

Remarquez que de $-\frac{y\,d\,dy}{dy_2} = 0$, l'on conclut $ddy = 0$; parceque dans $-\frac{y\,d\,dy}{dy^2} = 0$, il eſt viſible que ce n'eſt pas dy^2 qui eſt $= 0$, autrement cette fraction ſeroit infinie; ce n'eſt pas non plus y qui ſoit $= 0$, puiſque $y > dy^2$. Donc c'eſt $ddy = 0$.

Remarquez auſſi que dans tout ceci ce n'eſt que AL qu'on traite de plus grand, & non AE; & qu'ainſi ceci ne regarde que le point d'infléxion, & non de rebrouſſement. Il faut examiner ceci.

Digitized by Google

Page 60, Art. 66, 2°. ligne 7.

Or ſi l'on nomme, &c.

Fig. 51 52. des Infin. Petits.

1°. SI B eſt l'origine des x au-dedans de la courbe, AL ſera un *plus grand*, lorſque F ſera un point d'inflexion, & AE un *plus petit*, lorſque ce point F ſera un point de rebrouſſement; & l'on aura pour lors AL ou $AT = x - \frac{ydx}{dy}$.

2°. Au contraire, ſi C eſt l'origine des x hors de la courbe, AL ſera un *plus petit*, lorſque F ſera un point d'infléxion, & AE un *plus grand*, lorſque le point F ſera un point de rebrouſſement; & l'on aura pour lors, comme ci-deſſus, AL ou $AT = x - \frac{ydx}{dy}$.

REMARQUE.

ON trouve $ddy = 0$, ou $ddy =$ à l'infini dans le point F. Pour diſcerner ſi ce point eſt d'infléxion ou de rebrouſſement, il faut ſuppoſer des x plus grandes & enſuite moindres que AE; & ſi l'on y trouve des ordonnées par-delà F, ce point ſera d'infléxion; ſi l'on trouve qu'elles reviennent du côté de M, ce point F ſera de rebrouſſement.

Page 60, Article 66, 2°. ligne 11.

De ſorte que multipliant, &c.

L'Auteur ayant trouvé $-\frac{ydxdy}{dy^2} = 0$, le diviſe par $-\frac{y}{dy^2}$, & il trouve $ddy = 0$, ce qui peut faire d'abord quelque difficulté. Car pourquoi (dira-t-on) le diviſe-t-il par $\frac{-y}{dy^2}$, & non pas par $-\frac{dxdy}{dy^2}$, ou par $-ddy$, ou par $-y$, ou pourquoi ne le multiplie-t-il pas par dy, &c?

La réponſe eſt facile. Car puiſque $-\frac{ydxdy}{dy^2} = 0$, marque

que $-yddy = o$, & que cependant $-y$ eſt reel ; il faut que ce ſoit ddy qui ſoit $= o$, ainſi l'Auteur a eu raiſon de diviſer $\frac{-yddy}{dy^2}$ par $\frac{-y}{dy^2}$.

Voilà pour le cas où $-\frac{y\,d\,dy}{dy^{-2}}$ eſt $= o$. Quant à celui où $-\frac{yddy}{dy^{-2}}$ eſt $= \frac{a}{o}$ infini abſolu ; il eſt pareillement viſible qu'il donne $ddy = \frac{-ady^{-2}}{yo} = \frac{-ady^{-2}}{o}$ infini abſolu.

Remarquez la différence qu'il y a entre un infini abſolu & un infini relatif : l'infini abſolu, c'eſt le quotient d'une grandeur quelconque, diviſée par un veritable zero, comme $\frac{a}{o}$, $\frac{ady^{-2}}{o}$, &c. Et l'infini relatif, c'eſt le quotient d'une grandeur diviſée par une autre également réelle, mais infiniment petite par rapport à elle, comme $\frac{a}{dx}$. Or il eſt viſible que lorſque $\frac{-yddy}{dy^{-2}}$, n'eſt pas $= o$, il doit être $= \frac{a}{o}$ infini abſolu ; car ſi $\frac{-yddy}{dy^{-2}}$ étoit $= \frac{a}{dx}$ infini relatif, l'on auroit $ddy = -\frac{ady^{-2}}{ydx}$ infiniment petit, au lieu d'être infini, comme il le doit être, quand il n'eſt pas $= o$. Donc alors $ddy = \frac{a}{o}$ infini abſolu.

Pour bien ſentir la différence qu'il y a entre l'infini abſolu $\frac{a}{o}$, & l'infini relatif $\frac{a}{dx}$; il faut conſiderer que quelque grandeur m qui diviſe $\frac{a}{o}$, infini abſolu, elle donnera toujours $\frac{a}{mo} = \frac{a}{o}$ infini abſolu ; au lieu que diviſant $\frac{a}{dx}$, infini relatif, elle le changera en $\frac{a}{mdx}$ fini ſi m eſt auſſi un fini relatif.

Article 66, 2°. *Page* 61, *ligne* 6.

L'origine A des x, &c.

SI l'on remarque (*Fig.* 57. des Infin. Petits) que BT décroît à meſure que BM croît, au lieu que dans la Fig. 56, BT croît auſſi ; l'on aura (*Fig.* 57.) Ht négative pendant qu'elle ſera poſitive dans la Fig. 56, comme les mR ſont

& dans l'autre. Donc (*Figure* 57.) l'on aura $Ht = \frac{-dxdy^2 + ydxddy}{dy^2}$; & partant $Ht - Ho$ ou Ot ſera $= \frac{-dxdy^2 + ydxddy - dx^3}{dy^2} = o$; ou à l'infini ; ce qui revient à $\frac{dxdy^2 + dx^3 - ydxddy}{dy^2} = o$, ou à l'infini ; comme on l'a trouvé page 62, Figure 56, des Infin. Petits.

Article 66, *Page* 62, *ligne premiere.*

En ſuppoſant dx conſtante.

Fig. 56 des Infin. Petits. SI l'on ſuppoſe dy conſtante, la différence de BT ($\frac{ydx}{t}$) ſera $Bt - BT$ ou $Ht = -\frac{dydx + ydxdx}{dy}$; & partant $OH + Ht$ ou $Ot = \frac{dx^3}{dy^2} + \frac{dydx + ydxdx}{dy} = \frac{dx^3 + dy^2dx + ydydxdx}{dy^2}$. D'où il ſuit en multipliant par dy^2, que la valeur de $dx^3 + dy^2dx + ydydxdx$ ſera nulle ou infinie ſous le point d'inflexion ou de rebrouſſement F.

Page 63, *Art.* 67, *ligne premiere.*

Nota. *A la tête de cet Eclairciſſement qui ne comprenoit d'abord que le* 1°. *& le* 2°. *M Varignon avoit mis ces mots*, à examiner, *qui montrent qu'il n'étoit pas content de ces deux remarques, & qu'il vouloit encore examiner cet Article. L'ayant fait dans la ſuite, il ajouta le* 3°. *qui ſuit ſous le titre de* difficulté, *& qui eſt écrit poſterieurement d'une autre plume & d'une autre encre que le* 1°. *& le* 2°. *Il a fallu remarquer ceci afin qu'on ne ſoit point ſurpris de l'oppoſition qui ſe trouve entre ce qu'il dit au* 1°. *& ce qu'il dit au* 3°. Secundæ curæ meliores.

1°. FIgure 52, 53, des Infin. Petits. Lorſque $ddy = o$, le point F eſt d'infléxion ; & lorſque $ddy =$ à l'infini, ce point F eſt de rebrouſſement ; puiſque dans le premier cas, la différentielle de AL ſe trouve nulle par rapport à celle de AE, & infinie dans le ſecond.

2°. De même Fig. 54, 55, 56, 57, des Infin. Petits.

Lorſque $dx^2 + dy^2 - yddy = o$, le point F eſt d'infléxion; & lorſque $dx^2 + dy^2 - yddy =$, à l'infini, ce point F eſt de rebrouſſement: parceque dans le premier cas la différence (Ot) de BT ſe trouve nulle par rapport à dx, & infinie dans le ſecond.

DIFFICULTE'.

3°. REMARQUE: $ddy =$ à l'infini eſt ſi peu une marque ſûre du point de rebrouſſement d'une courbe, que ce $ddy =$ à l'infini ſe trouve dans pluſieurs non rebrouſſées. Par exemple dans la Roulette allongée de l'article 70, Fig. 59, des Infin. Petits, on trouve pour cette courbe $ddy = \frac{bcx - acc - bcc}{2cx - xx \times \sqrt{2cx - xx}} \times dx^2$ qui, en prenant $ddy =$ à l'infini, donneroit $2cx - xx = o$, & conſéquemment $x = 2c$, quoique cette courbe ne ſoit point rebrouſſée: cela prouve ſeulement qu'elle eſt touchée par ſa derniere ordonnée BK en ſon extrémité K, ou qu'en ce point elle a $ddy =$ à l'infini.

De même dans la courbe AEF, telle que faiſant un demi cercle ADB, le prolongement CE de ſon ordonnée DC, ſoit par tout $= AD$; ſi l'on prend $AB = 2a$, $AC = x$, & $CE = y$; le cercle ayant $CD = \sqrt{2ax - xx}$, & ſon arc $AD = \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, l'équation de la courbe AEF ſera $y = \int \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, ou $dy = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$; ce qui (en prenant dx conſtante) donnera $ddy = \frac{axdx^2 - aadx^2}{2ax - xx \times \sqrt{2ax - xx}}$. Fig. 20.

Si donc on prend ici $ddy =$ à l'infini, l'on y aura $2ax - xx = o$, ou $x = 2a$: cependant la courbe AEF n'a point de point de rebrouſſement. Ainſi $ddy =$ à l'infini prouve ſeulement ici qu'elle eſt touchée en ſon extrémité F par ſa derniere ordonnée BF, ou qu'en ce dernier point F elle a $ddy =$ à l'infini.

De même encore $ddy =$ à l'infini dans l'équation $ddy = \frac{-aadx}{2ax - xx \times \sqrt{2ax - xx}}$ reſultante de celle du cercle en y

prenant ſes ordonnées $= y$, & dx conſtante; donnant auſſi $2ax - xx = 0$, ou $x = 2a$, marque ſeulement que la touchante du cercle à l'extrémité de ſon diametre, eſt parallele à ſes ordonnées, ou qu'à cette extrémité de ſon diametre, il a $ddy =$ à l'infini.

Et ainſi de pluſieurs autres courbes où $ddy =$ à l'infini, marquera ſeulement des tangentes paralleles à leurs ordonnées ſans aucun point de rebrouſſement. Donc, quoiqu'il y en ait d'effectivement rebrouſſées aux points déterminez par $ddy =$ à l'infini, comme dans la deuxiême parabole cubique de l'article 69 des Infin. Petits, ce $ddy =$ à l'infini n'en eſt pas une marque ſûre: auſſi la tangente en ce point eſt-elle parallele aux ordonnées de cette parabole dans cet art. 69.

Page 64, Exemple II, Article 69,

L'Auteur ne dit point ſi c'eſt ici un point de rebrouſſement ou d'infléxion.

Page 67, Exemple V, Article 72, ligne 18.

L'Auteur donne $\frac{a+\sqrt{aa-8ab}}{4}$ & $\frac{a-\sqrt{aa-8ab}}{4}$ pour les deux racines de $xx - \frac{ax}{2} + \frac{ab}{2} = 0$. Voici comment il les a trouvées.

L'égalité propoſée $xx - \frac{ax}{2} + \frac{ab}{2} = 0$, ſe réduit à $xx - \frac{2ax}{4} = -\frac{8ab}{16}$; & en ajoutant $\frac{aa}{16}$ de part & d'autre, l'on fait $xx - \frac{2ax}{4} + \frac{aa}{16} = \frac{aa-8ab}{16}$. Donc $x - \frac{a}{4} = \pm\sqrt{\frac{aa-8ab}{4}}$, ou $x = \frac{a\pm\sqrt{aa-8ab}}{4}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Page 69, Exemple VII, Art. 74, ligne 7.

Ayant nommé, &c.

Fig. 64 des Infin. Petits. L'Auteur fait $EB = -\frac{ydx}{dy}$; parceque (dit-il) x croiſſant, y diminue. Cela eſt vrai depuis F à l'infini vers K;

mais depuis A juſqu'en F x & y augmentent & diminuent enſemble. Ainſi en prenant ces variables entre A & F, il faudroit $EB = \frac{ydx}{dy}$ du côté de A.

Page 69, *Exemple VII*, *Art.* 74, *ligne* 22.

De $\frac{dy\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx} = \frac{nnvvdy - mmyydy}{nnxy}$, l'Auteur conclut $y\sqrt{mm - nn} = nx$: voici comment. Diviſez la premiere égalité par $\frac{dy}{v}$, il viendra $\sqrt{mmyy - nnxx} = \frac{nnvv - mmyy}{ny}$, ou $ny\sqrt{mmyy - nnxx} = nnxx - mmyy$; ce qui étant quarré, donne $n^2m^2y^4 - n^4x^2y^2 = \overline{n^2x^2 - m^2y^2}^2$, ou $-n^4x^2y^2 + n^2m^2y^4 = \overline{n^2x^2 - m^2y^2}^2$; & le diviſant par $n^2x^2 - m^2y^2$, il viendra $-nnyy = nnxx - mmyy$, ou $mmyy - nnyy = nnxx$; ce qui donne $y\sqrt{mm - nn} = nx$. *Ce qu'il falloit*, *&c.*

Page 74, *Art.* 77, *ligne premiere.*

SOIT ſur l'axe BX une courbe quelconque BEQ, dont AC, EF, KM, ſoient trois ordonnées infiniment proches les unes des autres, & paralleles entr'elles; Soient auſſi EN, KN deux des rayons de ſa dévelopée. Enſuite après avoir prolongé AE en V, en ſorte que EV ſoit une touchante en E de cette courbe, ſoit l'arc KG décrit du centre E, & du rayon EK. Soient enfin AD, EL, KR, GO, paralelles à l'axe BX; & RS, GH, paralles à MK, qui prolongée rencontre EV en P. Cela fait, *Figure* 21.

Soit AE *conſtante*, *c'eſt-à-dire*, AE = EK = EG.

1°. L'on aura { EN . EG :: EG . GK . à cauſe des triang. ſemblab. ENK & GEK; EG . GH :: GK . GO . à cauſe des triang. ſemb. EGH & KGO.

Donc EN . GH :: EG . GO, & par conſéquent $EN = \frac{GH \times EG}{GO}$.

2°. L'on aura $\begin{cases} EN . EG :: EG . GK . \text{ à cauſe des triang. ſemb. } ENK \text{ \& } GEK. \\ EG . EH \text{ ou } EL :: GK . OK, \text{ à cauſe des trian. ſemb. } EGH \text{ \& } KGO. \end{cases}$

Donc $EN . EL :: EG . OK$. Et par conſéquent $EN = \frac{EB \times EG}{OK}$.

Soit AD *conſtante, c'eſt-à-dire,* AD = EL.

3°. L'on aura $\begin{cases} EN . EG :: EG . GK . \\ EL . EP \text{ ou } EG :: GK . PK . \text{ à cauſe de } EPL \text{ \& } KPG \text{ ſemb.} \end{cases}$

Donc $EN \times EL . \overline{EG}^{2} :: EG . PK$. Et par conſéquent $EN = \frac{\overline{EG}^{3}}{EL \times PK}$

4°. L'on aura $\begin{cases} EN . EG :: EG . GK . \\ EL . LP :: GK . GP . \text{ à cauſe de } EPL \text{ \& } KPG \text{ ſemb.} \end{cases}$

Donc $EN \times EL . EG \times LP :: EG . GP$, Et par conſéquent $EN = \frac{\overline{EG}^{2} \times LP}{EL \times GP}$.

Soit ED *conſtante, c'eſt-à-dire,* ED = LK.

5°. L'on aura $\begin{cases} EN . EG :: EG : GK \\ RS \text{ ou } KL . ER \text{ ou } EG :: GK . KR . \text{ à cauſe de } ERS \text{ \& de } KRG \text{ ſemb.} \end{cases}$

Donc $EN \times KL . \overline{EG}^{2} :: \overline{EG}^{2} . KR$. Et par conſequent $EN = \frac{\overline{EG}^{3}}{KL \times KR}$

6°. L'on aura $\begin{cases} EN . EG :: EG . GK . \\ RS \text{ ou } KL . ES :: GK . GR . \text{ à cauſe de } ERS \text{ \& } KRG \text{ ſemb.} \end{cases}$

Donc $EN \times KL . EG \times ES :: EG . GR$. Et par conſéquent $EN = \frac{\overline{EG}^{2} \times ES}{KL \times GR}$.

Pour avoir toutes ces formules en termes analytiques, ſoient preſentement appelées AE ou EK, dv; AD ou EL, dx; & ED ou KL, dy.

1°. Cela fait, il eſt viſible qu'en ſuppoſant AE (dv), conſtante, c'eſt-à-dire, $AE = EK = EG$, l'on aura les triangles AED & EGH égaux & ſemblables; ce qui don-

nera pour lors HL ou $GO = ddx$, & $OK = ddy$. Et par conſéquent auſſi pour lors (n. 1.) $EN\left(\frac{GH \times EG}{GO}\right) = \frac{dydv}{ddx}$; & (n. 2.) $EN\left(\frac{EL \times EG}{OK}\right) = \frac{dxdv}{ddy}$.

2°. De même, ſi l'on fait $AD\,(dx)$ conſtante, c'eſt-à dire, $AD = EL$, l'on aura les triangles AED & EPL égaux & ſemblables, ce qui donnera pour lors $PK = ddy$, & $PG = ddv$. Donc on aura auſſi pour lors (n. 3.) $EN\left(\frac{\overline{EG}^3}{EL \times PK}\right) = \frac{dv^3}{dxddy}$; & (n. 4.) $EN\left(\frac{\overline{EG}^2 \times LP}{EL \times Gr}\right) = \frac{dv^2dy}{dxddv}$.

3°. Enfin ſi l'on fait $ED\,(dy)$ conſtante, c'eſt-à dire, $ED = KL$, l'on aura auſſi pour lors les triangles AED & ERS égaux & ſemblables; ce qui donnera de même alors SL ou $RK = ddx$, & $GR = ddv$. Donc on aura auſſi pour lors (n. 5.) $EN\left(\frac{\overline{EG}^3}{KL \times KR}\right) = \frac{dv^3}{dyddx}$; & (n. 6.) $EN\left(\frac{\overline{EG}^2 \times ES}{KL \times GR}\right) = \frac{dv^2dx}{dyddv}$. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit ici trouver.*

COROLLAIRE I.

PUISQUE l'hypoteſe de $AE\,(dv)$ conſtante (n. 1.) donne $EN = \frac{dydv}{ddx} = \frac{dxdy}{ddy}$, l'on aura $EN \,.\, 1 :: \left\{\begin{matrix} dy \,.\, \frac{ddx}{dv} \,. \\ dv \,.\, \frac{ddx}{dy} \,. \\ dx \,.\, \frac{ddy}{dv} \,. \\ dv \,.\, \frac{ddy}{dx} \,. \end{matrix}\right\}$

Ce qui eſt le premier des Problêmes géneraux de M. Leibnitz pour les rayons oſculateurs dans les Actes de Leipſix de 1694, page 365.

COROLLAIRE II.

PUISQUE l'hypoteſe de ED (dy) conſtante (n. 3.) donne $EN = \frac{dv^2}{dx\,ddx} = \frac{dv^3}{dy\,ddx}$, l'on aura [$EN \times \frac{dy}{dv}(FX)$. 1 :: dv^2 . ddx :: $\frac{dv^2}{dy}$. $\frac{ddx}{dy}$.] ce qui eſt l'autre Theorême général de M. Leibnitz. *Ibid.*

Page 75, ligne 2.

SI l'on ſuppoſe dy conſtante, la difference de MC ($\frac{z\sqrt{dx^2+dz^2}}{dx}$) devant être nulle, l'on trouvera $dx\,dz\sqrt{dx^2+dy^2} + \frac{z\,dx^2\,ddx}{\sqrt{dx^2+dz^2}} - z\,ddx\sqrt{dx^2+dy^2} = o$, c'eſt-à-dire, $\frac{dx^3\,dz + dx\,dy^2\,dz + z\,dx^2\,ddx - z\,dx^2\,ddx - z\,dz^2\,ddx}{dx^2\sqrt{dx^2+dz^2}} = o$; ce qui donne $dx^3\,dz + dx\,dy^2\,dz = z\,dy^2\,ddx$, & de-là $z = \frac{dx^3\,dz + dx\,dy^2\,dz}{dy^2\,ddx}$ (à cauſe de $dy = dz = \frac{dx^2 + dx\,dy^2}{dy\,ddx}$.

Page 75, ligne 5.

METHODE POUR TROUVER LES COURBES que d'autres décrivent par leur dévelopement.

Fig. 12. *SOit une Courbe quelconque* ACO, *qui par ſon dévelopement, en décrive une autre* AMD : *la premiere étant donnée, on demande celle-ci.*

SOLUTION.

SOIT CM un rayon quelconque de la dévelopée ACO, dont l'axe ſoit AO, ſur lequel des points C & A tombent les perpendiculaires CF & AB, que ME parallele à cet axe, rencontre en E & en P; ſoit le reſte comme on le voit ici. Soient de plus $AF = x$, $FC = y$, $AP = v$, $MP = z$, & $Mm = dS$.

Cela

Cela posé, l'on aura (*Analyse des Infiniment Petits*, *page 75.*) $\frac{ds^2}{-ddz} = ME = z + x$; & par ainsi $x = \frac{ds^2}{-ddz} - z$. De plus $MR\,(dv).Km\,(dz) :: ME\left(\frac{ds^2}{-ddz}\right) : EC\,(y - v) = \frac{-dzds^2}{dvddz}$; & par ainsi encore $y = \frac{dzds^2}{-dvddz} + v$. Donc en substituant cette valeur de x & de y dans l'équation donnée de la développée ACO, l'on aura celle de la courbe cherchée AMD, qu'elle décrit en se développant.

Page 76., Art. 79, ligne 7.

Dans les maniéres premiere, seconde, troisiéme, l'on fait (*Fig. 69.*) ddy positif; & dans la quatriéme (*Fig. 69.*) on fait ddy négatif, quoique ces Figures soient les mêmes. *Fig. 69. des Infin. Petits.*

Page 77, ligne 5.

POUR avoir Tt, on prend la différence de $TA = PT\left(\frac{ydx}{dy}\right) - AP\,(x)$; dont la différence (en prenant dx constante) donne $\frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2} - dx = \frac{-ydxddy}{dy^2} = Tt$: & cela pour avoir un point fixe A. Cela n'est pourtant pas necessaire; on peut avoir Tt, en prenant tout d'un coup la différence de $TP\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ qui est $\frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2} = Tt + Pp$. Donc en retranchant Pp, (dx) l'on auroit $\frac{-ydxddy}{dy^2}$, comme de l'autre maniére.

Page 78, ligne 23.

SI l'on fait $Mm = dv$, l'on aura $MF = \frac{ydx}{dv}$, & $BF = \frac{ydy}{dv}$; & par conséquent. *Fig. 68 des Infin. Petits.*

1°. En faisant dy constante, l'on aura $Bf - BF$ ou $Hf = \frac{dvdy^2 - ydydddv}{dv^3} =$ (à cause de $dv = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ & de $ddv = -\frac{dxddx}{dx^2 + dy^2} = \frac{dxddx}{dv}$) $= \frac{d^{-2}dy^2 - ydydxddx}{dv^3}$. Donc $Mm - Hf = \frac{dv^4 - dv^2dy^2 + ydydxddx}{dv^3}$ (à cause de $dv^2 - dx^2 = dx^2$) $= \frac{dv^2dx^2 + ydydxddx}{dv^3}$. Or $Mm - Hf\left(\frac{dv^2dx^2 + ydydxddx}{dv^3}\right)$.

$Mm\,(dv) :: MH\,(\frac{ydx}{dv}) . Mc = \frac{ydxdy^2}{dv^2dx^2+ydydxddx} = \frac{ydv^2}{dv^2dx+ydydx}$

2°. Si l'on prend dv pour conſtante, l'on aura $Bf - BF$ ou $Hf = \frac{dy^2+ydd y}{dv}$; & par conſéquent $Mm - Hf = \frac{dv^2-dy^2-ydd y}{dv} = \frac{dx^2-ydd y}{dv}$. Or $Mm - Hf\,(\frac{dx^2-ydd y}{dv}) . Mm\,(dv) :: MH\,(\frac{ydx}{dv}) . MC = \frac{ydxdv}{dx^2-ydd y} = \frac{ydydv}{dxdy-ydd x}$.

REMARQUE. A cauſe de $dx^2+dy^2 = dv^2$ conſtante, l'on aura $dxddx = dyddy$.

Page 80, après la ligne 17.

CONSTRUCTION GE'NERALE DES RAYONS des dévelopées des courbes qui ont leurs ordonnées paralleles, ou perpendiculaires à l'axe.

Fig. 23. SOIENT $AP = x$, $PM = y$, les coordonnées de la courbe AMD, dont les élemens ſoient dv ; MT une de ſes touchantes quelconque, & MC le rayon de la dévelopée correſpondant.

* Pag. 78 des Infin. Petits. I. On voit donc (* en faiſant dy conſtante) que

$$MC = \frac{dv^3}{dydddx} = \frac{addydv^3}{addy^2ddx} = \frac{addv^2}{dy^2} \times \frac{dydv}{addx} = \frac{a \times \overline{MT}^2}{\overline{MP}^2} \times \frac{dydv}{addx}.$$

Or en imaginant une courbe LN dont les ordonnées ſoient $PN = \frac{adx}{dy} = \frac{a \times PT}{MP}$, dy conſtante donnera $dPN = \frac{addx}{dy}$; & par conſéquent $\frac{dydv}{addx} = \frac{dv}{dPN}$ (la touchante NS donnant $SP . PN :: dx . dPN = \frac{PN \times dx}{SP}$) $= \frac{SP \times dv}{PN \times dx}$

$= \frac{SP \times MT}{PN \times TP}$. Donc $MC\,(\frac{dv^3}{dydddx}) = \frac{a \times \overline{MT}^2}{\overline{MP}^2} \times \frac{SP \times MT}{PN \times TP} =$

$= \frac{a \times SP \times \overline{MT}^3}{\overline{MP}^2 \times PN \times TP}$ en grandeurs toutes finies.

II. Mais si l'on considere que (*Const.*) $PN = \frac{a \times PT}{MP}$, & $TP . MT :: MT . TQ = \frac{\overline{MT}^2}{TP}$, l'on aura $\frac{a \times SP \times \overline{MT}^2}{MP \times PN \times TP} = \frac{SP \times MT \times TQ}{MP \times TP}$ (à cause que CM prolongée jusqu'à la rencontre de VT perpendiculaire à l'axe AQ, donne $MP . MT :: TQ . VQ = \frac{MT \times TQ}{MP}$) $= \frac{SP \times VQ}{TP}$. Donc aussi $MC\left(\frac{dvi}{dydx}\right) = \frac{SP \times VQ}{TP}$: de sorte qu'en general $TP . SP : VQ . MC$.

D'où l'on voit en general que pour trouver le rayon MC de la développée d'une Courbe donnée quelconque AMD, il n'y a qu'à en tirer la touchante MT, & faire ensuite sur le même axe une courbe LN, dont chaque ordonnée PN soit quatriême proportionnelle à MP, PT, & à une constante quelconque a, & dont par consequent l'on aura aussi toujours les soutangentes SP; car alors si l'on fait comme TP à SP, ainsi VQ à une quatriême MC, cette quatriême proportionnelle MC sera le rayon cherché de la développée.

III. *Exemple.* Soit AMD une parabole en general, dont on demande le rayon MC de la développée. Son lieu $x = y^m$ donnera $dx = my^{m-1}dy$, ou $\frac{ydx}{dy}(TP) = my^m = mx$. Donc $PN\left(\frac{a \times TP}{MP}\right) = \frac{max}{y}$ (à cause de $x = y^m$, ou de $x^{\frac{1}{m}} = y$) $= x^{\frac{max}{1}}{}^{\frac{1}{m}} = max^{1-\frac{1}{m}} = max^{\frac{m-1}{m}}$, & $dPN = m-1 \times ax^{\frac{m-1}{m}-1}dx = m-1 \times ax^{\frac{1}{m}}dx = \frac{\overline{m-1} \times a}{\frac{1}{x^m}}dx$. Or $dPN\left(\frac{\overline{m-1} \times adx}{\frac{1}{x^m}}\right) . dx :: PN\left(\frac{max}{\frac{1}{x^m}}\right) . PS = \frac{mx}{m-1}$. Donc aussi $MC\left(\frac{SP \times VQ}{TP}\right) = \frac{VQ}{m-1}$ sera le Rayon des développées

de toutes les paraboles à l'infini ; ou de toutes les hyperboles à l'infini en rendant m négative.

Puiſque $PN = max^{\frac{m-1}{m}}$, il eſt viſible que LN eſt encore une parabole dont l'expoſant des ordonnées PN eſt $\frac{m}{m-1}$.

Pour faire une courbe dont les ordonnées égalent ſes rayons MC, il faut conſiderer qu'ici $MC\left(\frac{VQ}{m-1}\right)$

$= \frac{MT \times TQ}{\overline{m-1}MP} = \frac{\sqrt{mmxx + yy} \times mx + \frac{yy}{mx}}{m-1y}$ (à cauſe de $x = y^m$)

$= \frac{\sqrt{mmxx + x^{\frac{2}{m}}} \times \overline{mmxx + x^{\frac{2}{m}}}}{\overline{mm - m.x^{\frac{m+1}{m}}}} = \frac{\overline{mmxx + x^{\frac{2}{m}}}^{\frac{3}{2}}}{\overline{mm - mx}x^{\frac{m+1}{m}}}$, car en prenant

$z = MC$, l'on aura $z \frac{\overline{mmxx + x^{\frac{2}{m}}}^{\frac{3}{2}}}{\overline{mm - mx}x^{\frac{m+1}{m}}}$, pour le lieu de cette courbe ſur le même axe, & ayant les mêmes abſciſſes $AP = x$, que AMC.

Si l'on ſuppoſe $m = 2$, comme lorſque AMC eſt une premiere parabole, on aura $z = \frac{\overline{4xx + x}^{\frac{3}{2}}}{2 \times x^{\frac{1}{2}}} = \overline{4x + 1}^{\frac{3}{2}}$: de ſorte qu'au ſommet A, ou x eſt $= 0$, l'on aura $z = 1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$: c'eſt-à-dire, le rayon de la dévelopée égal à la moitié de ſon paramétre, &c.

Page 80, Propoſition II.

A

PROBLEME.

Trouver le Point B *où commence la dévelopée, ou (ce qui revient au même) trouver le premier rayon* AB *de la dévelopée.*

SOLUTION.

Fig. 72 des Infin. Petits. ENtre les rayons de la dévelopée MC, AB, il eſt viſible

que AB eſt le plus petit de tous. D'ailleurs le rayon de la dévelopée valant l'arc dévelopé + une grandeur conſtante, ou + zero; ce rayon au commencement de la dévelopée, ne doit valoir que cette grandeur conſtante, ou zero : Et par conſéquent, il doit être là le plus petit de tous. Pour le trouver, il faut donc faire un *plus petit* du rayon général de la dévelopée.

Page 80, Problème, Article 83.

POUR trouver le point où l'axe touche la dévelopée, il faut chercher le point où le rayon de la dévelopée eſt paralléle à l'axe; ce qui ſervira auſſi à trouver ce paralléliſme dans les courbes convexes du côté de leur axe, lequel ne ſçauroit toucher leur dévelopée.

Page 83, Article 86, ligne 7.

$dx . dy :: ME \left(\frac{ydx^2+ydy^2}{-2dxdy}\right). EC = \frac{ydx^2+ydy^2}{-2dxdy} = -\frac{ydx}{dy} = -\frac{ydy}{2dx}$.

Page 84, ligne 6.

Voyez ci-deſſous l'éclairciſſement ſur la page 103, ligne 16.

Page 89, Exemple VI. Art. 91, ligne 8.

PUISQUE (*hyp.*) la raiſon $\frac{dy}{dx}$ eſt conſtante, ſoit $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b}$. Cela poſé, ſi après avoir fait du centre A, & d'un rayon quelconque AD, le cercle GDF, qui rencontre AM, Am, en E, e, l'on appelle AD, a; & DE, z; l'on aura $AE(a) . AM(y) :: Ee(dz) . MR(dx) = \frac{ydx}{a}$. Donc on aura auſſi $\frac{a}{b}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{ady}{ydx}$, c'eſt à dire $dz = \frac{bdy}{y}$; ou plûtôt $dz = -\frac{bdy}{y}$, à cauſe que $DE(z)$ & $AM(y)$ croiſſent alternativement. Et par conſéquent, en integrant, $z = -bly\left(bf\frac{dy}{y}\right)$ + le contraire de ce que $-bly$ devient lorſque $z = 0$. Or ce cas de $z = 0$, *Fig.* 24.

ou de E en D, rendant auſſi M en D, donne $-bly = -la$. Donc l'integrale complette ſera ici $z = bla - bly = bl\frac{a}{y} = L\frac{a^b}{y^b}$. D'où l'on voit que l'arc $DE(z)$ devient infini lorſque $y = 0$; & par conſequent la ſpirale DMA doit faire une infinité de révolutions avant que d'arriver à ſon centre A.

AVERTISSEMENT.

LA Methode qui nous vient de conduire ici, eſt de M. Bernoulli Profeſſeur à Groningue, preſentée à l'Académie le 13 Decembre 1702.

Page 94, ligne 12.

M. Bernoulli (Jean) Profeſſeur à Groningue, a démontré le contraire dans le mois de Juillet des Actes de Leipſik de 1699, pag. 318, & ſuiv. Il y a, dis-je, démontré une infinité de ſegments & de ſecteurs de cette premiere cycloïde, leſquels ſont abſolument quarables, c'eſt à dire, quarables indépendemment d'aucune quadrature du Cercle, ou de telle autre Courbe que ce ſoit.

Page 99, Article 105, ligne 13.

Voyez la Remarque qu'on fera cy-après ſur la page 107, ligne premiere.

Page 100, ligne 10.

DIVISION DES ANGLES RECTILIGNES en tant de parties égales qu'on voudra.

LEMME.

Ce Lemme eſt le Theorême 4 *ad Sectiones angulares* de Vietre, pag. 291 de l'édition de Hollande de 1646.

SOit un Arc circulaire quelconque AFB *diviſé en tel nombre de parties égales qu'on voudra, par les cordes* AC, AD, AE, *&c. Je dis que la premiere* AC *eſt à la ſeconde* AD, *comme toute autre* AG *à la ſomme des deux plus voiſines* AF + AH. Fig. 25.

DE'MONSTRATION.

SUR la prolongée AH ſoit appliquée $GM = AG$; & ſoient tirées les droites FG, GH: le triangle AGM étant iſoſcelle, l'angle M ſera = ang. GAH = ang. FAG; l'on aura auſſi l'angle $GMH = \frac{1}{2}$ arc. $GPQA = GFA$: Et par conſéquent les deux triangles GHM, GFA, ayant les côtez $GM = AG$, de même que $GH = FG$, ſeront ſemblables & égaux. Donc on aura auſſi $HM =$ à la corde AF. Or ayant tiré la droite CD, les triangles ACD, AGM, ſeront ſemblables; car l'un & l'autre eſt iſoſcelle, & de plus ils ont à leurs baſes les angles CAD & GAM égaux entr'eux. Donc enfin $AC . AD :: AG . AM = AH + HM = AH + AF$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

De là ſe déduit une formule univerſelle pour la ſection des angles rectilignes en tant de parties égales qu'on voudra: Voici comment. Du point A ſoit le diametre AP, du point C le rayon CO & la droite CP.

Les angles P & D inſiſtans ſur le même arc CA, ſont égaux ; & partant les triangles iſoſcelles COP, ACD, ſont ſemblables ; ce qui donne $CO . CP :: AC . AD$. Soit donc donné l'arc AFB à diviſer en tant de parties égales qu'on voudra. Soit le rayon $AO = a = 1$; la corde donnée $AB = b$; la corde cherchée $AC = x$: l'on aura $CP = \sqrt{4 - xx}$ (pour abreger) $= y$. Donc la ſeconde corde $AD = xy$. Pour avoir la troiſiême AE, je remarque par le Lemme que AC eſt à AD, ou CO à CP, comme AD à $\overline{AE + AC}$, qui ſera donc $= xyy$: de ſorte qu'en ayant retranché AC ou x, il reſtera $AE = xyy - x$. Pour avoir la quatriême AF, je fais derechef par le Lemme, $CO . CP :: AE . \overline{AF + AD}$ qui ſera $= xy^3 - xy$: ôtez-en AD, il reſtera $AF = xy^3 - 2xy$. Pour la cinquiême AG, je fais par le Lemme, $CO . CP :: AF . \overline{AG + AE} = xy^4 - 2xyy$: ôtez-en AE ($xyy - x$) il reſtera $AG = xy^4 - 3xyy + x$. Et ainſi l'on trouvera en peu de temps un auſſi grand nombre de ces cordes qu'on voudra.

Pour en tirer une formule univerſelle, il faut les diſpoſer en forme de Table comme dans la page ſuivante ; & où l'on y remarquera une uniformité de progreſſion ; car toutes les colonnes verticales ſans les coefficiens, ſont en progreſſion geometrique qui commence par x & xy ; & les coefficiens ſont des nombres figurez

1, 1, 1, 1, &c. 0, 1, 2, 3, 4, &c.

0, 0, 1, 3, 6, &c. 0, 0, 0, 1, 4, 10, &c. &c....

dont on connoît la proprieté *(Bern. Theſ. de ſeriebus infinitis pars prima :*) Sçavoir que chaque terme de quelque rangée que ce ſoit, eſt égal à la ſomme des termes de la précedente moins le dernier terme ; & que la ſomme des termes a toujours une raiſon conſtante au dernier terme. Cela étant ainſi, on trouvera facilement les derniers termes de ces colonnes verticales, en prenant n pour le nombre demandé des parties égales

de

1	x
2	xy
3	$xyy - 1x$
4	$xy^3 - 2xy$
5	$xy^4 - 3xyy + 1x$
6	$xy^5 - 4xy^3 + 3xy$
7	$xy^6 - 5xy^4 + 6xyy - 1x$
8	$xy^7 - 6xy^5 + 10xy^3 - 4xy$
9	$xy^8 - 7xy^6 + 15xy^4 - 10xyy + 1x$
&c.	$\&c - \&c + \&c - \&c + \&c \ldots\ldots$

n	$xy^{n-1} - \frac{n-1}{1}xy^{n-3} + \frac{n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2}xy^{n-5} - \frac{n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3}xy^{n-7} + \frac{n-4 \cdot n-5 \cdot n-6 \cdot n-7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}xy^{n-9}$ &c.

de l'arc AFB. Or la ſomme de ces derniers termes ſera egale à la derniere corde AB qui eſt donnée $= b$; vous aurez donc cette égalité univerſelle pour toutes les ſections angulaires, $b = xy^{n-1} \frac{n-2}{1} xy^{n-3} + \frac{n-1 \cdot n-4}{1 \cdot 2} xy^{n-5} \cdot \frac{n-4 \cdot n-5 \cdot n-6}{1 \cdot 2 \cdot 3} xy^{n-7} + \frac{n-5 \cdot n-6 \cdot n-7 \cdot n-8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} xy^{n-9}$ &c. On voit aſſez comment la progreſſion précedente ſe peut continuer tant qu'on voudra : la loi en étant très viſible ; & cette progreſſion comprend toutes les equations pour les ſections angulaires de quelque degré qu'elles ſoient. On voit auſſi que cette progreſſion devient finie en chaque cas particulier ; car n étant un nombre entier, on parvient enfin néceſſairement à un ter-

me égal à zero, auquel étant arrivé on néglige les termes ſuivans ; car ils n'appartiennent plus à la progreſſion, comme il paroît par la conſtruction de la Table précédente.

Exemple. S'il s'agit ſeulement de diviſer l'arc ou l'angle propoſé en trois parties égales ; alors $n = 3$ réduira l'équation generale $a\,b = xy^{n-1} - \frac{n-2}{1}xy^{n-3} = xyy - x$ (à cauſe de $y = \sqrt{4 - xx}$) $= 4x - x^3 - x = 3x - x^3$, ou $x^3 - 3x + b = o$, ou bien encore (à cauſe de $a = 1$) $x^3 - 3aax + aab = o$. Ce qui fait voir que la Triſection geométrique de l'angle dépend de la ſolution d'une équation du troiſiéme degré ; & qu'ainſi elle eſt impoſſible par le cercle ſeul & la ligne droite.

On tirera de même de la précédente équation generale, l'équation particuliere de toute autre diviſion d'angles en tel nombre de parties égales qu'on voudra.

Page 103 ligne 16.

L'Egalité $dx^2ddy + dy^2ddy - 3dyddy^2 = o$, qui ſe trouve ici * *pag. 103. art. 109.* ſe trouve encore *pag. 84. art. 86.* mais dans un ſens tout différent : dans la *page 84.* elle ſert à trouver le point de rebrouſſement de la développée, & ici elle ſert à trouver celui de la courbe qui naît du développement. Dans l'un & dans l'autre cas les x & les y ſont les abſciſſes & les ordonnées de la courbe qui naît du développement. Cette formule eſt générale pour les *points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte* dans toutes ſortes de courbes, & pour les points de rebrouſſement de la *premiere* dans les développées, les x & les y appartenant toujours à la courbe qui naît du développement dans toutes ſortes de courbes dont x & y ſoient les ordonnées & les abſciſſes.

* *Infin. Petits.*

Il eſt à remarquer que l'on fait un *plus grand* de la raiſon

de Nn à Mm, c'eſt à-dire de $\frac{Nn}{Mm}$, ce qui eſt effectivement vrai lorſqu'au point A (*fig. 91.**) Le rayon NH eſt infini; mais lorſqu'en ce point ce rayon NH eſt zero, alors la raiſon de NH à NM ou de Nn à Mm eſt infinie. Donc cette raiſon étant exprimée par $\frac{dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dy ddy^2}{dx ddy^2}$, Si on la fait infinie, comme dans le premier cas, l'on aura $dx ddy^2 = o$, ou (à cauſe de dx conſtante) $\pm ddy = o$; & dans le ſecond l'on aura $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dy ddy^2 = o$.

* *Des Infin. Petits.*

L'Auteur met en général $\frac{dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dy ddy^2}{dx ddy^2} = o$ ou $= \infty$. Or $\frac{dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dy ddy^2}{dx ddy^2} = \infty$ multiplié par $dx ddy^2 = o$, donne $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dy dddy^2 = \infty \times dx ddy^2 = \infty \times o$; ce qui eſt réel & non zero, cet o ne marquant pas ici un zero abſolu, mais ſeulement un infiniment petit.

Il faut faire auſſi cette remarque ſur la même formule qui eſt dans la page 84.

Page 104. Article 110 ligne 12.

LA raiſon pour laquelle Om eſt plutôt difference de LM que de MF, c'eſt que les LM toujours perpendiculaires ſur ILK, ne different jamais que des Om; au lieu que les MF ont de plus des differences qui réſultent du changement continuel des points F.

Page 104. Article 110 ligne 19.

DIfficulté. L'Auteur (*fig. 94. 95. 108*) * fait l'arc $HF = BM - BA + ME - AH$. de ſorte que lorque B eſt infiniment éloigné, comme dans les figures 96. 109.* ayant pour lors $AB = BM$, l'on auroit $HF = MF - AH$. Ce qui eſt faux.

* *Des Infin. Petits.*

* *Des Infin. Petits.*

Cependant parceque (*fig. 94. 97. 108.**) $BM - BA$

* *Des Infin. Petits.*

$= PM$, l'on aura auſſi $HF = PM + MF - AH$. Ce qui eſt vrai.

Il faut voir pourquoi dans la premiere égalité on ne peut pas faire $AB = BM$, lorſqu'ils ſont tous deux infinis, quoique cela ſe pratique partout ailleurs. On le peut enſorte qu'alors $AB + BM = 2AB = 2BM$, parceque la difference de AB, BM, eſt infiniment petite par raport à eux ; mais cela n'empêche pas que $BM - BA$ ne ſoit $= PM$.

Page 106 Article 113. ligne 10.

* Des Infin. Petits.

IL eſt à remarquer que dans l'art. 77. * page 74. & ſeq. (ME eſt là appellée z, & ici a ; à cauſe qu'elle varie là, & non ici) on a trouvé en général, c'eſt-à-dire dans le cas des appliquées (y) concourantes en B, $ME(a) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - ydddy}$. Donc en ſubſtituant cette valeur de a dans la formule ſuivante (*pag. 107* *) $\frac{ay}{2y-a}$ (MF), l'on aura auſſi en général $MF = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - 2yddy}$.

* Des Infin. Petits.

De ſorte que lorſque le point B ſera infiniment éloigné ; le rayon réfléchi MF, que la formule $\frac{ay}{2y-a}$ rendroit $= \frac{a}{2}$ deviendra ici $= \frac{dx^2 - dy^2}{2ddy}$

EXEMPLE.

Fig. 26.

SOIT une parabole AMD dans laquelle tombent des rayons BE paralelles à ſon axe AB ; ſoient $ME = y$ les ordonnées de cette courbe conformément à celles de la formule, $DE = x$ ſes abſciſſes, $DC = b$, ſon parametre en $A = p$, ſon lieu ſera $py = 2bx - xx$; ce qui donne $dy = \frac{2bdx - 2xdx}{p}$, $dy^2 = \frac{4b^2 - 4bx + 4x^2}{p^2} \times dx^2$, & (en faiſant dx conſtante) $ddy = -\frac{2dx^2}{p}$. Donc en ſubſtituant

ces valeurs dans la derniere formule $\frac{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}{-2a\,dy}$ (MF), l'on aura ici $MF=\frac{p^2+2bb-2x^2}{4p}$; de ſorte qu'en D (où x eſt $=o$) l'on aura ce rayon réfléchi $=\frac{p^2+4bb}{4p}$, & en A (où $x=b$) l'on aura ce rayon $AF=\frac{p}{4}$; ce qui fait voir que la cauſtique rencontre ici l'axe à une diſtance AF égale au quart du paramétre.

Pour faire voir préſentement que non ſeulement cette cauſtique coupe l'axe de la parabole à cette diſtance ; mais encore qu'elle s'y raſſemble toute, c'eſt à-dire que tous les rayons réfléchis ſe raſſemblent au point F de cet axe : il faut remarquer que *art. 110. pag. 104. des Infiniment Petits*, il a été démontré que cette cauſtique vaut ME (y ou $\frac{2bx-xx}{p}$) + le rayon réfléchi en M ($\frac{pp+4bb-8bx+4xx}{4p}$) — le rayon réfléchi en D ($\frac{pp+4bb}{4p}$). Donc cette cauſtique ſera $=\frac{2bx-xx}{p}+\frac{pp+4bb-8bx+4xx}{4p}$ $-\frac{pp-4bb}{4p}=\frac{8bx-4xx+pp+4bb-8bx+4xx-pp-4bb}{4p}=o$, c'eſt-à-dire, d'une longueur nulle, ou réduite en un point qu'on vient devoir être F, dans lequel tous les rayons réfléchis ſe raſſemblent.

Page 107. ligne 1.

APPELLANT B, y ; ME, a ; on trouve $MF=\frac{ay}{2y-a}=\frac{BM\times ME}{2BM-ME}$. Donc 1°. Lorſque $2BM>ME$, les MF ſont convergens.

2°. Lorque $2BM<ME$, ils ſont divergens.

3°. Lorſque $2BM=ME$, ou $BM=\frac{1}{2}ME$, ils ſont paralelles.

Or en faiſant le cercle MPQ ſur le diametre $MQ=\frac{1}{2}MC$, l'on aura $MP=\frac{1}{2}ME$. Donc 1°. Lorſque le point B ſera hors ce cercle, les MF ſeront convergens ; 2°. Lorſque ce point B ſera en P, ils ſeront pa-

ralelles ; 3°. Et lorſque *B* ſera dans ce cercle, ils ſeront divergens.

DIFFICULTE'.

SI la courbe *AMD*, de concave qu'elle eſt, devenoit convexe par raport à *B* ; il eſt queſtion de ſçavoir ſi c'eſt *BM* ou *EM*, c'eſt-à-dire *BM* ou *CM*, qu'il faudroit faire négative. Ce qui fait d'abord penſer que *CM* peut devenir négative, auſſi bien que *BM*, c'eſt qu'on peut regarder *B* comme fixe pendant que la courbe ſe renverſe ; & en ce cas c'eſt le point *C* qui ſemble paſſer de l'autre côté, de même que *B* feroit ſi l'on ſuppoſoit la courbe & le point *C* fixes.

RE'PONSE.

LE point *C* étant toujours du côté de la concavité de la courbe *AMD*, il ne ſçauroit changer de côté par raport à elle ; & s'il en change par raport à *B* lorſqu'elle ſe renverſe, ce n'eſt que pour la ſuivre, & pour n'en point changer par raport à elle. Comme donc le poſitif & le négatif des lignes *BM*, *CM*, dépend de leur poſition par raport à la courbe, & que *CM* n'en change jamais, ſe trouvant toujours du côté de la concavité, quelque ſituation que cette courbe prenne ; il ſuit que c'eſt à *BM* à devenir poſitive ou négative, ſelon qu'elle ſe trouve de côté ou d'autre de la courbe, c'eſt-à-dire, du côté la concavité ou de la convéxité.

* *Des Infin. Petits.*

C'eſt pour cela que dans les Fig. 87. 88. **OB* étant toujours demeuré du côté de la concavité de l'arc *BGD*, il eſt toujours demeuré poſitif, au lieu que *AB* en a changé, & il eſt devenu négatif (*Fig. 88.*) de poſitif qu'il étoit (*Fig. 87.*)

REMARQUE GENERALE pour le changement des ſignes + & —.

EN général les grandeurs qui terminées à une courbe, deviendroient zero dans cette courbe, ne deviennent de poſitives négatives, ou de négatives poſitives, qu'en ſe trouvant tantôt du côté de la concavité de la courbe, tantôt du côté de ſa convéxité, ſoit qu'elles y ayent effectivement paſſé, ou que la courbe ſe ſoit retournée par raport à elles; & c'eſt en ce ſens qu'il faut dire que ces grandeurs en changeant de côté par raport à la courbe, deviennent de poſitives négatives, ou de négatives poſitives. Ainſi celles qui demeurent toujours du même côté de la courbe, ne changent point de ſigne.

Il eſt à remarquer qu'une grandeur eſt toujours poſitive du côté où on l'a ſuppoſée en faiſant le calcul; c'eſt-à-dire, que l'ayant priſe poſitivement en faiſant le calcul, elle demeure poſitive tant qu'elle ne change point le côté qu'elle avoit alors.

Page 107. Article 114.

Le rayon de la dévelopée entre dans la valeur de MF, en ce qu'il entre dans la valeur de EM (*a*).

Page 108. ligne derniere ajoutez,

La cauſtique ſera toujours ici une ligne droite.

A la même page & même ligne.

CEtte conſéquence ſe peut auſſi prouver ſur la Fig. 97.* Car lorſque MC eſt infinie, MQ l'eſt auſſi; & par con-

* *Des Infin. Petits.*

ſéquent BM ſe trouvera toujours au dedans du cercle alors infini MPQ. Donc alors (ſuivant la remarque de la page 107. ligne 1.) les rayons réfléchis ſeront divergens. Or lorſque Mm eſt une ligne droite, le rayon MC eſt infini. Donc, &c.

Page 109. Article 118. ligne 1.

DEux points quelconques des trois B, C, F, étant donnés, l'on aura le troiſiême. Car prenant $MF = x$, l'on aura (*Art. 113.**) $MF\,(x) = \frac{ay}{2y-a}$. Donc 1°. ſi B & C, c'eſt à-dire, a & y ſont donnés, l'on aura $x = \frac{ay}{2y-a}$, c'eſt-à-dire, F. 2°. Si B & F, c'eſt-à-dire, x & y ſont donnés, l'on aura $a = \frac{2xy}{y+x}$, c'eſt-à-dire, C. 3°. Si C & F, c'eſt à-dire, a & x ſont donnés, l'on aura $y = \frac{ax}{2x-a}$, c'eſt-à-dire, B.

* *Des Infin. Petits.*

Page 117. Sur la Propoſition II. Art. 128.

Fig. 27. POur prouver que HF eſt la cauſtique de la courbe AM décrite de la premiere maniere, ſuffit-il de prouver que $AH + HE = MP + MF$? ne faudroit-il point encore prouver que BM & MF ſont des angles égaux ſur AM?

Suivant cette maniere de conſtruire la courbe AM, ſi les rayons BA, BM, devenoient paralelles, la Figure 108* deviendroit celle-ci. Et pour avoir en ce cas la courbe Am par cette pratique, il faudroit prendre ſur le rayon incident BP perpendiculaire à l'axe AP, telle portion PM qu'on voudra, avec $AH + HE = PM$; enſuite développer la portion de cauſtique EF en commençant au point E, juſqu'à ce qu'elle rencontre MK paralelle à AP, en quelque point m; ce point m ſera un de ceux de la courbe cherchée, & le rayon bm paralelle à AB, ſe réfléchira au point m ſur la courbe Am,

* *Des Infin. Petits.*

Am, & ſon réfléchi mF touchera en F la courbe HF; & par tant HF en ce cas ſera la cauſtique de Am. La raiſon de tout cela c'eſt que $pm = PM = AH + HE$, & $mF = EF$, donnent $pm + mF = AH + HF$.

Page 121. ligne 11.

DAns cette Fig. (112) à cauſe de $mR . mO :: CE . CG :: m . n$. L'on aura AP (ſomme des mR) . ML (ſomme de mO) :: $m . n$. ou $n \times AP = m \times ML$, c'eſt-à-dire, $n \times \overline{AB - BM} = m \times \overline{AH - MF - FH}$; & par conſequent $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} AB$. *Des Infin. Pet. Fig. 28.

Page 122. ligne 9.

IL faut voir ſi la conſtruction, qui eſt ici, ne pouroit pas s'accommoder aux lignes droites; ou ſi elle conviendroit mieux aux courbes lorſque $n > m$ comme dans l'art. 139. Fig. 116 des Infin. Petits.

Page 123. ſur le Corollaire II. Art. 135.

1°. VOyez ci-deſſus l'éclairciſſement donné ſur la page 107 ligne 1.

2°. La raiſon pour laquelle a (*Fig. 111. des Infin. Petits.*) devient de poſitive négative, lorſque ME (a) paſſe de l'autre côté de MF; c'eſt que cela ne peut arriver que lorſque BM paſſe du côté de C, comme en tournant de B vers C; & en ce cas EM (a) devient = o, & enſuite négatif, auſſi bien que BM (y). de ſorte qu'en ce cas $\frac{bbmy}{bmy - any - aan}$ devient $\frac{-bbmy}{-bmy - any - aan}$ ou $\frac{bbmy}{bmy + any + aan}$; ou s'il n'y avoit que a négative, la for-

mule $\frac{bbmy}{bmy \mp any \mp aan}$; & par conſéquent pour les deux cas de a & de y, toutes deux négatives, ou de a ſeulement négative, l'on aura $\frac{bbmy}{bmy \mp any \pm aan}$. Si y ſeule devenoit négative, la formule $\frac{bbmy}{bmy \mp any - aan}$ deviendroit $\frac{-bbmy}{bmy \mp any - aan}$ ou $\frac{bbmy}{bmy - any \mp aan}$. De ſorte que lorſqu'il n'arrive aucun changement à a, mais ſeulement à y, comme lorſqu'il ne s'agit que de refraction (en ce cas le rayon incident & le rayon rompu ſe trouvent toujours du même côté du rayon de la développée) l'on a generalement $\frac{bbmy}{bmy - any \mp aan}$, le ſigne ſuperieur de $\mp$ marque le cas où y eſt poſitive ; & l'inférieur, celui où elle eſt négative. Mais ſi l'on ſuppoſe de plus que a ſoit négatif, cette formule ſe réduira à $\frac{bbmy}{bmy \mp any \mp aan}$; de ſorte que ſi $a = b$, & $m = n$, comme lorſque la réfraction ſe change en réfléxion, l'on aura $\frac{ay}{2y \mp a}$; ce qui s'accorde avec l'art. 13, des cauſtiques par réfléxion ; le ſigne ſuperieur dans $\mp$ marquant y poſitif ici & là ; & l'inférieur, y négatif ; mais avec cette différence qu'ici l'y poſitif eſt du côté de la convéxité de la courbe, & le négatif du côté de ſa concavité. C'eſt-à-dire que le ſigne ſupérieur de $\mp$ marque là le point lumineux au dedans de la courbe, & ici au dehors ; ou (ce qui revient au même) le ſigne ſupérieur — marque de part & d'autre le point lumineux du côté qu'on l'a ſuppoſé en faiſant le calcul, & le ſigne +, de l'autre côté.

Pag. 123, *Corollaire II. Art.* 135.

Voyez ce qui a été dit ci-deſſus ſur la page 107. l. 1.

Page 123, *ſur le Corollaire III. Art.* 136.

IL eſt à remarquer qu'on ne parle de rayons rompus convergens ou divergens, qu'après qu'ils ont traverſé la courbe dans laquelle ils ſe rompent.

Page 124, *ligne* 3.

MF eſt poſitive concourante du côté de la dévelopée dans le premier cas, & négative concourante du côté oppoſé dans le ſecond.

Page 124, *ligne* 8.

Si $m < n$, l'on aura $CE < CG$. Donc $ME\ (a) > MG\ (b)$.

Page 124, *ligne* 10.

Parceque *MF* ſera négative dans le premier cas, & poſitive dans le ſecond.

Page 124, *ligne* 15.

$MH\ \frac{bm}{n} - a$ eſt poſitif lorſque $m > n$; $MH = a - \frac{bm}{n}$ négatif lorſque $m < n$.

Page 124, *ligne* 25.

Car (*hyp*) $CE = o$. Or (*hyp*) $m . n :: cE\ (o) . CG$. Donc $CG = o$.

Page 125, *ligne* 6.

PROPOSITION I.

SI la pointe M *d'un triangle rectiligne quelconque* CME *s'éloigne à l'infini de ſa baſe* CE, *qui demeure toujours la* Fig. 29.

même ; Je dis que ſes côtés CM, EM, *deviendront infinis & geométriquement égaux ou ne differeront que d'une grandeur infiniment petite par raport à eux.*

DEMONSTRATION.

SI du centre *M* on fait un arc *EO* ; il eſt viſible que dans l'eloignement du point *M* à l'infini, les droites *ME*, *MO*, ſeront toujours égales entre elles, de ſorte que *ME* & *MC* ne differeront jamais que de la valeur de *OC* ; laquelle, lorſque le point *M* eſt infiniment éloigné, devient tout-à fait nulle, ſi l'angle *MEC* eſt droit, à cauſe qu'en ce cas *OE* ſe confond avec *CE* ; ou ſi l'angle *MEC* n'eſt pas droit, le triangle *OCE* ayant pour lors tous ſes angles finis, ſes côtés *CO* & *CE* ſeront de même genre, c'eſt-à-dire que *CE* étant alors infiniment petite par raport à *ME*, *MO*, que l'éloignement infini du point *M* rend infinies, la difference *OC* de ces grandeurs infinies *ME*, *MO*, ſera auſſi infiniment petite par raport à elles. Donc lorſque la pointe *M* du triangle *MEC* eſt infiniment éloignée de la baſe *CE* qu'on ſuppoſe conſtante, les deux côtés *CM*, *EM*, alors infinis, ne differeront que d'une grandeur infiniment petite par raport à elles, au point du tout. Et par conſéquent, ils ſeront geométriquement égaux, c'eſt-à-dire que leur raport ſera d'égalité, une telle différence n'étant rien par raport à eux. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

QUoique *OC* ne ſoit rien par raport aux grandeurs infinies *CM*, *EM*, le raport qu'elle a à *CE*, lorſque l'angle *MEC* n'eſt pas droit, fait cependant voir qu'elle eſt une véritable grandeur finie. Ainſi quoique dans la ſuppoſition du point *M* infiniment éloigné de la baſe

conſtante *BC*, l'on ait toujours $CM = EM$, il ne faudra pourtant dire $CM - EM = o$, que lorſque l'angle *MEC* ſera droit; car s'il ne l'eſt pas, $CM - EM$ ou *CO* ſera quelque choſe & même une grandeur de même genre que *CE*, c'eſt-à-dire, une grandeur finie. Ainſi en ce dernier cas l'on peut dire que *MC* & *ME* ſont geometriquement égales & arithmetiquement inégales : *geometriquement égales*, parceque leur raport eſt d'égalité. Et *arithemetiquement inégales*, parceque cette difference eſt une grandeur finie, quoique nulle par raport à elles.

PROPOSITION II.

AU contraire ſi la baſe CE *s'éloigne à l'infini de la pointe* M, *toujours paralellement à elle-même, l'angle* M *demeurant auſſi toujours le même ; les côtés* MC, ME, *deviendront infinis ; mais nullement égaux, s'ils ne le ſont dés-à-preſent.* Fig. 30.

DEMONSTRATION.

PUiſque (*hyp.*) *CE* demeure toujours paralelle à elle-même, & que l'angle *M* ne change point ; quelque grand que devienne le triangle *CME*, il ſera toujours ſemblable à celui-ci ; & par conſéquent les côtés *CM*, *ME*, quoiqu'infinis, auront toujours entre eux le même raport qu'ils ont ici ; donc en les y ſuppoſant inégaux, quelque grand qu'on ſuppoſe cet éloignement de la baſe *CE*, ils ne deviendront jamais geometriquement égaux, & encore moins arithemétiquement. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

SI *a* & *b* ſont infinies dans la formule $\frac{bbmy}{bmy - amy + aan}$,

les termes *bmy*, *any*, seront nuls par raport aux autres *bbmy*, *aan*; ce qui réduira cette formule à $\frac{bbmy}{\mp aan}$ dans laquelle les grandeurs *a* & *b*, qu'on a regardées comme infinies, seront regardées comme finies, à cause du raport qui en est fini.

DIFFICULTE'.

SI *a* & *b* sont infinies, il semble que $\frac{bbmy}{\mp aan}$ soit $= \frac{my}{n}$; car il semble qu'alors *a* soit $= b$, ces deux grandeurs étant de même espece & infinies.

RE'PONSE.

CEtte difficulté suppose que tous les infinis sont égaux; ce qui n'est pas vrai. La fin de la page 125 *, explique ceci. Car (*Fig.* 114. *) les triangles *MEC* & *MBO*, *MGC* & *MLO* demeurant toujours semblables de quelque grandeur qu'on suppose *CM*; il suit que quand il seroit infini; & *MG* (*b*), *ME* (*a*) aussi, l'on auroit toujours *ME* (*a*). *MG* (*b*) :: *BM*. *ML*. C'est-à-dire, inégales. De là on voit qu'il n'arrivera jamais *ME* = *MC*.

*Des Infin. Pet.

*Des Infin. Pet.

Page 125, *ligne* 7.

Seront aussi infinies parcequ'un infiniment petit est infini par raport à son quarré.

Page 126, *Article* 136, *ligne* 20.

$HFN = HA - DN - \frac{2}{3}AC = 3AC - \frac{2}{3}AC - DN = \frac{7}{3}AC - DN\left(\sqrt{CD^2 + \frac{4}{9}CD^2}\right) = \frac{7}{3}AC - \frac{2}{3}AC\sqrt{5} = AC \times \frac{7-\sqrt{5}}{3}$.

Puiſque $FH = AH - \frac{2}{3} PM$, l'on aura la cauſtique entiere $HFN = AH\ (3CA) - DN - \frac{1}{3} CA = \frac{7}{3} CA - DN$ (à cauſe de $DN = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{CN}^2} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \frac{4}{9}\overline{CD}^2} = \sqrt{\frac{5}{9}\overline{CD}^2} = \frac{1}{3} CA\sqrt{5}$) $= \frac{7}{3} CA - \frac{1}{3} CA\sqrt{5} = \frac{7-\sqrt{5}}{3} CA$.

Ibidem. La Cauſtique entiere $HFN = AH + \frac{3}{2} AK = 2CA + \frac{1}{2} AK$ (à cauſe de $CK = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{NK}^2} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \frac{4}{9}\overline{CA}^2} = \frac{1}{3} CA\sqrt{9-4} = \frac{1}{3} CA\sqrt{5}$, l'on aura $AK = CA - \frac{1}{3} CA\sqrt{5}$, & $\frac{1}{2} AK = \frac{1}{2} CA - \frac{1}{2} CA\sqrt{5}$) $= 2CA + \frac{1}{2} CA - \frac{1}{2} CA\sqrt{5} = \frac{7}{2} CA - \frac{1}{2} CA\sqrt{5} = \frac{7-\sqrt{5}}{2} CA$.

Puiſque $NK = \frac{1}{3} CD$, & que ſur l'arc ND il ne ſe fait plus aucune réfraction, on voit qu'il eſt entierement inutile de faire des verres ſphériques d'une plus grande corde que les deux tiers du diametre, lorſque les rayons ſont paralelles, comme on ſuppoſe d'ordinaire ceux du ſoleil juſqu'à nous.

Quoique AB, MB ſoient infinies, l'auteur ne laiſſe pas de les concevoir inégales, en diſant que $AB - MB = MP$. D'où l'on voit que ſi en les comparant entr'elles, on les fait égales, c'eſt parceque cette différence PM n'eſt rien par raport à elles, mais en elle-même, elle eſt toujours quelque choſe, & étant finie elle doit toujours être comptée avec des grandeurs finies. Tout cela s'accorde avec le Corollaire de la Propoſition 1. ci deſſus page 68. & 69.

Page 129, *ligne* 3.

CAr cette Analogie donnant $m\sqrt{aa - 2ax + xx + yy} = n\sqrt{xx + yy}$, ou $aamm - 2ammx + mmxx + mmyy = nnxx + nnyy$, l'on aura $mmyy - nnyy = 2ammx - aamm - mmxx + nnxx$, & enfin $yy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx$.

Page 130, *ligne* 14.

PAr l'article 132, l'on a $DH + \frac{n}{m}CN - \frac{n}{m}DC = NF + FH$, & $AH - \frac{n}{m}BM + \frac{n}{m}BA = MF + FH = MN + NF + FH$. Il faut éxécuter la conſtruction qui ſuit de ceci.

Page 131, *Article* 146, *ligne* 6.

POur voir comment le point touchant de chaque parabole AMC avec la courbe cherchée, eſt le point d'interſection de cette parabole avec ſon infiniment voiſine, il faut conſiderer cette courbe touchante comme un polygone d'une infinité de côtés pris ſur les paraboles qu'il touche, & qui lui ſont communs avec ces paraboles à l'endroit où il les touche. Ainſi le point d'interſection où concourent deux côtés dans leſquels deux paraboles infiniment voiſines ſont touchées par cette courbe, ſera un des angles du polygone qui la forme; & par conſéquent il ſera dans cette courbe.

Pour le voir encore plus nettement, il faudra conſiderer que cette courbe touchante n'eſt faite que de portions infiniment petites des paraboles, dans leſquelles ces paraboles ſont touchées par cette courbe. Ainſi le concours de ces portions, c'eſt-à-dire, les interſections de ces paraboles infiniment voiſines ſeront dans cette

cette courbe ; & comme ces portions d'atouchement peuvent être prises pour des points, elles peuvent être regardées comme les points d'atouchement de ces paraboles avec la courbe touchante.

Page 132, *ligne* 1.

POur voir comment l'équation précedente (*Page* 131 *) $2zxdx = 2vxdy + 2vydx - v^2dy$ donne $v = \frac{2xzdy - zzydx}{xdy - 2ydx}$, en y substituant la valeur de z, il faut remarquer que l'on vient de trouver (*Pag.* 131.*) $zxx = 2vxy - vvy$ pour l'équation commune à toutes les paraboles AMC dont il s'agit ici ; & par conséquent $z = \frac{2vxy - vvy}{xx}$. Donc en substituant cette valeur de z dans $2zxdx = 2vxdy + 2vydx - vvdy$, l'on aura $\frac{4vxydx - vvydx}{x} = 2zxdx$ (*Pag.* 131.*) $= 2vxdy + 2vydx - vvdy$, ou $2vxydx - 2vvydx = 2vxxdy - xvvdy$, c'est-à-dire, $vxdy - 2vydx = 2xxdy - 2xydx$; & par conséquent $v = \frac{2xxdy - 2xydx}{xdy - 2ydx}$.

* *Des Infin. Petits.*

* *Des Infin. Petits.*

* *Des Infin. Petits.*

Il est à remarquer que les y (PM) ayant été pris ici pour les axes des paraboles AMC, & les x (AP) pour leurs ordonnées, ces grandeurs x & y doivent croître ou décroître en même tems : ainsi l'on a eu raison de prendre ici leurs différentielles dx & dy toutes deux positives. Ce sont les v (AK), z (KC), qui croissent ou décroissent en tems différens ; c'est pour cela que si on les eût différentiées, il auroit fallu en affecter les différences dv, dz, de signes contraires, c'est-à-dire, en faire une positive & l'autre négative.

Page 132, *Article* 147, *ligne* 4.

POur voir comment l'égalité $xx = 4ay - 4yy$ donne ici AK ($\frac{2xxdy - 2xydx}{xdy - 2ydx}$) $= \frac{4x}{y} = v$, il faut remarquer que

$xx = 4ay - 4yy$ donne $dy = \frac{xdx}{2a-4y}$. Donc en ſubſtituant cette valeur de dy dans AK ($\frac{2xxdy-2xydx}{xdy-2ydx}$, l'on aura $AK = \frac{\frac{2x^2dx}{2a-4y}-2xydx}{\frac{x^2dx}{2a-4y}-2ydx} = \frac{2x^2-4axy+8xyy}{xx-4ay+8yy}$; & en mettant pour xx ſa valeur $4ay - 4yy$, l'on aura enfin AK ($\frac{2xxdy-2xydx}{xdy-2ydx}$) $= \frac{8axy-8xyy}{4ay-4yy} = \frac{4axy+8xyy}{4ay+8yy} = \frac{4axy}{4yy} = \frac{ax}{y} = v$.

Page 133, *ligne* 12.

IL eſt à remarquer que $xx = 4ay - 4yy$ exprime tout à la fois la demi-ellipſe AMB, & la parabole AMC; mais avec cette différence que cette équation eſt le lieu de la demi-ellipſe AMB & qu'elle lui convient par tout, au lieu qu'elle ne convient à la parabole AMC que par raport à l'ordonnée AP & à l'abſciſſe PM.

De ce que G eſt le foyer de la parabole AMC, ſa tangente en A doit diviſer en deux également l'angle BAG, comme on le ſçait par les élémens.

Page 133, *ligne* 13.

$4ay - 4yy$) puiſque xx ($\overline{AP}^2$) $= 4ay - 4yy$ ($4a - 4y \times MP$).

Page 133, *ligne* 21.

Par tous les points C) parcequ'elles auront le même paramétre, & les ſommets différens ſur le même axe.

Page 134, *Article* 148, *ligne* 14.

LA raiſon pour laquelle on ne fait point $PK = v$, conſtante, c'eſt que les points P & p changent & que K demeure immobile, pendant qu'on paſſe de P en p, répondant à l'interſection C de deux cercles qui ont P, p, pour centres.

Page 134, *Article* 148, *ligne* 25.

CEtte ſeconde maniere de trouver PK ne me paroît mener à rien ; parceque le triangle différentiel Ppo ayant les côtés infiniment petits, il ne peut donner que $PK = \frac{ydy}{dx}$, ce qu'on avoit déja : à moins que ce ne fût pour la trouver primitivement.

Page 135, *ſur la Propoſition III.*

ON peut encore trouver d'une autre maniere le point C de la courbe AC, en ajoutant F à la Fig. 124*. Car $Aq\,(y) . Ap\,(x) :: Qq\,(dy) . QE = \frac{xdy}{y}$. & $PQ = \sqrt{xx+yy}$. De plus les triangles ſemblables PCp, QCE, donneront $Pp - QE\,(dx - \frac{xdy}{y} . Pp\,(dx) :: PQ\,(\sqrt{xx+yy}) . PC = \frac{ydx\sqrt{xx+yy}}{ydx-xdy}$. Ainſi $PC\,(\frac{ydx\sqrt{xx+yy}}{ydx-xdy}) . PQ\,(\sqrt{xx+yy}) :: PK\,(v+x) . AP\,(x)$. Donc $vydx - vxdy + xydx - xxdy = xydx$, ou $vydx - vxdy = xxdy$; ce qui donne $v\,(AK) = \frac{xxdy}{ydx-xdy}$.

* *Des Infin. Petits.*

REMARQUE.

COmme $\sqrt{xa+yy}$ s'évanouit ici, on peut en ſa place appeller PQ, r ; & r s'évanouira de même ; & alors le calcul en ſera plus facile & plus ſimple.

AUTREMENT.

ON trouve $Aq\,(y) . Ap\,(x) :: Qq\,(dy) . QE = \frac{xdy}{y}$. Et de plus $Pp\,(dx) . QE\,(\frac{xdy}{y}) :: PC . CQ :: PK\,(v+x) . AK\,(v)$. Donc $vydx = xxdy + vxdy$, ou $vydx - vxdy = xxdy$; ce qui donne $v\,(AK) = \frac{xxdy}{ydx-xdy}$.

Cela donne auſſi $vy . xx + vx :: dy . dx :: y . AP (t)$. Donc $vt = xx + vx$, ou $vt - vx = xx$; & par conſéquent $s - x (AT) . x (AP) :: x (AP) . v (AK)$.

PLUS GENERALEMENT.

Fig. 32. SOit encore une courbe quelconque AQS dont les abſciſſes $AB = s$, & le reſte comme ci-deſſus, excepté que EQ eſt prolongée juſqu'à la rencontre de bq en R.

L'on aura $bq (y) . bp (x + s) :: Rq (dy) . RE = \frac{xdy + sdy}{y}$. Donc $QE = \frac{xdy + sdy - yds}{y}$. Or $Pp (dx) . QE (\frac{xdy + sdy - yds}{y}) :: PC . CQ :: PK (x + v) . BK (v - s)$. Donc $vydx - sydx = xxdy + vxdy + sxdy + svdy - xyds - vyds$, ou $vydx - vxdy - vsdy + vyds = xxdy + sxdy - xyds + sydx$. Ce qui donne $v (AK) = \frac{xxdy + sxdy - vyds + sydx}{ydx + xdy - sdy + yds}$.

1°. Si la courbe AQS eſt concave du côté de AM, alors AB devenant négatif, tous les termes où s & ds ſeront en dimenſion impaire, doivent changer de ſignes; ce qui réduit cette formule à $v (AK) = \frac{xxdy - sxdy + xyds - sydx}{ydx - xdy + sdy - yds}$.

2°. Si AQS eſt une ligne droite paralelle à PM; alors $BA (s)$ ſe trouvant $= o$, tous les termes où ſe trouvent s & ds ſeront auſſi $= o$; ce qui réduit la formule précédente à $v (AK) = \frac{xydy}{ydx - xdy}$. Ainſi qu'on l'a trouvé ci-deſſus pour la Propoſition 3, dont il s'agit ici.

3°. Si AM étoit une ligne droite perpendiculaire ſur AP, l'on auroit $AP (x) = o$, & $dx = o$; ce qui réduiroit toute la formule précédente à zero, c'eſt-à-dire, qu'on auroit alors $AK (v) = o$.

Page 136, sur l'Exemple II. Art. 152.

ON peut encore trouver $\mathcal{Q}C$ indépendemment du Problême précédent, en faisant l'arc qR du centre C. Car le triangle $\mathcal{Q}AP$ ou qAp étant semblable aux triangles POp, $\mathcal{Q}Rq$, l'on aura $P\mathcal{Q}\,(a)\,.\,A\mathcal{Q}\,(y)\,::\,Pp\,(dx)\,.\,PO = \frac{ydx}{a}$. & $P\mathcal{Q}\,(a)\,.\,AP\,(x)\,::\,\mathcal{Q}q\,(dy)\,.\,qR = \frac{xdy}{a}$. Et par conséquent $PO + qR\,(\frac{ydx+xdy}{a}\,.\,qR\,(\frac{xdy}{a}\,::\,Oq$ ou $P\mathcal{Q}\,(a)\,.\,qC$ ou $\mathcal{Q}C = \frac{axdy}{ydx+xdy}$. Or, à cause de $a^2 = x^2 + y^2$, l'on aura $o = xdx - ydy$ ou $dy = \frac{xdx}{y}$. Donc $\mathcal{Q}C = \frac{ax^2dx}{y^2dx+x^2dx} = \frac{xx}{a}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

AUTREMENT.

ON peut encore trouver $\mathcal{Q}C$ d'une autre maniere. Soit $\mathcal{Q}C = r$, l'on aura $\mathcal{Q}P\,(a)\,.\,AP\,(x)\,::\,\mathcal{Q}C\,(r)\,.\,AK\,(v)$, ou $rx = av$, dans laquelle égalité a & v sont constantes pendant que r & x varient en sens contraire. Donc $rdx - xdr = o$, ou $rdx = xdr$; ce qui donne $x\,.\,r\,::\,dx\,(Pp)\,.\,dr\,(\mathcal{Q}R$ ou $Op)\,::\,pq\,(a)\,.\,Ap\,(x)$. Et par conséquent r ou $\mathcal{Q}C = \frac{xx}{a}$. *Ce qu'il falloit trouver.*

Page 136, Art. 152, ligne 4.

AM ou AB; parceque $\overline{P\mathcal{Q}}^2 = \overline{\mathcal{Q}M}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{AB}^2$.

Page 137, ligne 3.

POur trouver le lieu A de la courbe BCD, il faut considerer que puisque * $\mathcal{Q}C = \frac{xx}{a}$, l'on aura $CP = a - \frac{xx}{a}$. Ainsi $\mathcal{Q}P\,(a)\,.\,\mathcal{Q}A\,(y)\,::\,CP\,(a - \frac{xx}{a})\,.\,CK\,(z)$. Et par

Fig. 125.

* *Art. 152, des Infin. Pet.*

conſéquent $a^2 z = a^2 y - xxy$, ou $a^4 z^2 = a^4 y^2 - 2a^2 x^2 y^2 + x^4 y^2$. Or le cercle BMD donne $a^2 - x^2 = y^2$. Donc, en ſubſtituant cette valeur de y^2, l'on aura $a^4 z^2 = a^6 - 3a^4 x^2 + 3a^2 x^4 - x^6$. ou, en tirant la racine cubique de part & d'autre, $\sqrt[3]{a^4 z^2} = a^2 - x^2$. Or, à cauſe de (*Art.* 152 *) $v = \frac{x^3}{aa}$, l'on aura $x = \sqrt[3]{aav}$, & $xx = \sqrt[3]{a^4 v^2}$. Donc $\sqrt[3]{a^4 z^2} = a^2 - \sqrt[3]{a^4 v^2}$, ou $\sqrt[3]{az^2} = a - \sqrt[3]{av^2}$ ſera le lieu de la courbe BCD.

* *Des Infin. Petits.*

Pour faire voir preſentement que ce lieu eſt le même que le lieu A de la page 137 * ; il faut enchaſſer les ſignes radicaux. Pour cela je prend $p = \sqrt[3]{av^2}$, ou $p^3 = av^2$; ce qui me donne $\sqrt[3]{az^2} = a - p$. Je cube le tout, & il me vient $az^2 = a^3 - 3aap + 3app - p^3 =$ (à cauſe de $p^3 = av^2$) $= a^3 - 3aap + 3app - av^2$, ou $zz = aa - 3ap + 3pp - vv$, ou bien encore $z^2 + v^2 - a^2 = 3pp - 3ap$: de ſorte qu'en prenant $m^2 = z^2 + v^2 - a^2$, l'on aura $m^2 = 3pp - 3ap$. Or on avoit auſſi (*hyp.*) $p^3 = av^2$. Donc $m^2 p^3 = 3av^2 pp - 3a^2 v^2 p$, ou $m^2 p^2 = 3av^2 p - 3a^2 v^2$; ce qui donne $p = \frac{3a^2 v^2}{3av^2 - m^2 p}$, & $p^2 = \frac{3av^2 p - 3a^2 v^2}{m^2}$. Or la pénultiême égalité trouvée $m^2 = 3p^2 - 3ap$ donne auſſi $p = \frac{m^2}{3p - 3a}$, & $p^2 = \frac{m^2 + 3ap}{3}$. Donc $\frac{3a^2 v^2}{3av^2 - m^2 p} = \frac{m^2}{3p - 3a}$, & $\frac{3av^2 p - 3a^2 v^2}{m^2} = \frac{m^2 + 3ap}{3}$. Et par conſéquent en faiſant évanouir ces fractions, l'on aura $9a^2 v^2 p - 9a^3 v^2 = 3av^2 m^2 - m^4 p$, & $9av^2 p - 6a^2 v^2 = m^4 + 3m^2 ap$; ce qui donne 1°. $p = \frac{3av^2 m^2 + 9a^2 v^2}{9a^2 v^2 + m^4}$, & 2°. $p = \frac{9a^2 v^2 + m^4}{9av^2 - 3am^2}$.

Ces deux valeurs de p donneront donc $\frac{3av^2 m^2 + 9a^2 v^2}{9a^2 v^2 + m^4} = \frac{9a^2 v^2 + m^4}{9av^2 - 3am^2}$; & par conſéquent $81a^4 v^4 + 18a^2 v^2 m^4$

$+ m^8 = 27a^2v^4m^2 - 9a^2v^2m^4 + 81a^4v^4 - 27a^4v^2m^2$, ou (en réduiſant le tout à zero, & le diviſant enſuite par m^2) $m^6 + 27a^2v^2m^2 - 27a^2v^4 + 27a^4v^2 = 0$. Donc en reſtituant au lieu de m^2 ſa valeur (*hyp.*) $z^2 + v^2 - a^2$, & le cube de cette valeur au lieu de m^6, on aura $z^6 + 3z^4v^2 + 3z^2v^4 + v^6 - 3a^2z^4 - 6a^2v^2z^2 + 3a^4z^2 - 3a^2v^4 + 3a^4v^2 - a^6 + 27a^2v^2z^2 + 27a^2v^4 - 27a^4v^2 - 27a^2v^4 + 27a^4v^2 = 0$. Donc, en mettant cette égalité en en ordre, l'on aura

$$\begin{array}{r} v^6 - 3a^2v^4 + 3a^4v^2 - a^6 = 0. \\ + 3z^2 + 21a^2z^2 + 3a^4z^2 \\ + 3z^4 - 3a^2z^4 \\ + z^6 \end{array}$$

Pour l'expreſſion rationelle du lieu précédent $\sqrt[3]{az^2} = a - \sqrt[3]{av^2}$, c'eſt-à-dire pour le lieu rationnel, ou à la maniere de Deſcartes, de la courbe *BCD*. *Ce qu'il falloit trouver.*

Page 137, Article 153, ligne 4.

La raiſon pour laquelle on fait ici $cp - CP = Op - Cc$, c'eſt que $cp - CP = cp - CO = cO + Op - cO - Cc = Op - Cc$.

Page 137, Corollaire Article 153, ligne 8.

ON peut encore trouver autrement la longueur de la courbe *BCD* ou de ſes parties. Car *AP* (x) . *PQ* (a) :: dv . *Cc*. Donc $Cc = \frac{adv}{x}$. mais parceque (*Article* 152*.) $v = \frac{x^3}{aa}$, l'on aura $dv = \frac{3xxdx}{aa}$. Donc $Cc = \frac{3xdx}{a}$ & $BC = \frac{3xx}{2a}$. Ainſi $BCD = \frac{3a}{2}$, & $CD = \frac{3a}{2} - \frac{3xx}{2a} = \frac{3aa-3xx}{2a} = \frac{3yy}{2a}$. Donc puiſque (*Art.* 152*.) $QC =$

* *Des Infin. Petits.*

Ibid.

$\frac{xx}{a}$, $PQ = a$, & $CP = a - \frac{xx}{a} = \frac{aa-xx}{a} = \frac{yy}{a}$, l'on aura 1°. $BC . QC :: \frac{3xx}{2a} . \frac{xx}{a} :: 3 . 2$. 2°. $BCD . PQ :: \frac{3a}{2} . a :: 3 . 2$. 3°. $CD . CP :: \frac{3aa-3xx}{2a}$ $(\frac{3yy}{2a}) . \frac{aa-xx}{a}$ $(\frac{yy}{a}) :: 3 . 2$.

Page 143, ligne 1.

PROPOSITION.

Fig. 33.

SOit une Section conique quelconque PMQN *avec une droite* EL *ſur le même plan; & que de tous les points* E, L, *&c. de cette ligne droite qu'on voudra, on mene deux tangentes (pour chacun)* EP *&* EQ, LM *&* LN, *&c. de cette Section; les droites* PQ, MN, *&c. qui joindront les points d'atouchement correſpondant au même point de la droite* EL, *ſe couperont toutes dans un même point* C *qui ſert ſur celui des diametres* BA *dont les ordonnées ſont paralelles à la droite* EL.

DE'MONSTRATION.

Nota. Il n'y a que cela dans l'Original. M. Varignon n'a pas fait la démonſtration.

Page 144, ligne 4.

POur voir pourquoi DM paralelle à LN, doit être $= \frac{b^3gh}{accf - ccfh}$, il faut conſiderer que $m(EF) . n(EG) :: bbgh . accf - ccfh$. c'eſt-à-dire que les ſinus des angles ELF, ELG, doivent être en cette raiſon. Or à cauſe de DM (*hyp.*) paralelle à LN, l'angle MDL eſt $=$ ang. ELG. Donc les ſinus des angles ELF ou DLM & MDL doivent être en cette raiſon : ſçavoir $DM . ML\ (b) :: bbgh . accf - ccfh$. Donc $DM = \frac{b^3gh}{accf - ccfh}$.

Page 145.

Page 145, Article 163.

IL eſt indiférent dans la Fig. 130.* que *db* ſe trouve devant ou après *DB*, pourvu qu'il en ſoit toujours infiniment proche, n'y ayant autre différence ſinon que lorſque *b* eſt entre *B* & *A*, les particules *bf*, *bg*, ſont toutes deux poſitives; & qu'elles ſont toutes deux négatives lorſque *b* eſt au-delà de *B*, ce qui fait que la fraction qui en réſulte n'en eſt pas moins poſitive: ſçavoir $\frac{-bf}{-bz} = \frac{bf}{bz} = \frac{+bf}{+bz}$. *Des Infin. Pet.

Page 145, ſur l'Article 163.

Voyez les Notes *tumult.* de Mr Bernoulli ſur la Géométrie de M. Deſcartes, page 459. & ſeq.

Page 146, ſur l'Article 166.

Voyez Newton *Philoſ. nat. princ. Math. Sect. 11. Prop. 58. pag. 163.*

Voyez auſſi les Actes de Leipſik du mois d'Août de 1695. pag. 374. &c.

Page 146, à la fin de l'Article 163.

IL eſt à remarquer que ſi après avoir différencié ſuivant la maniere de l'art. 163, la fraction dont le haut & le bas deviennent zero dans une certaine ſuppoſition comme ici la valeur de $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$ en faiſant $x = a$, cette même ſuppoſition de $x = a$, rendît encore zero le haut & le bas de la fraction réſultante; alors il faudroit encore la différencier ſuivant la maniere de l'art. 163; mais en ce cas il ſuffit de dif-

férencier les x, & non les dx que la premiere différenciation y auroit donnée ; parceque les ddx qui en réſulteroient ſe trouvent alors multipliés par la même grandeur que l'étoient auparavant les dx, & cette grandeur devenant (*hyp.*) zero dans la ſuppoſition de $x = a$, cette même ſuppoſition la rendroit encore zero ; ce qui feroit évanouir les ddx ; & par ainſi il ſeroit inutile de les introduire en différenciant dx. On verra de même qu'il ſeroit inutile de différencier telle autre différentielle qui y pouroit être.

Page 146, 147, 148, ſur le Lemme I.

COROLLAIRE III.

PUiſque, ſuivant la démonſtration de ce Lemme, l'on a par tout DF ou $DK . Ff :: MN$ ou $AE . Mm \pm Nn$. ou $Ff . Mm \pm Nn :: DK . AE$. C'eſt-à-dire en raiſon conſtante, il ſuit indéfiniment que $KF . DM \pm HN :: DK . AE$. ſçavoir + lorſque les courbes DM, HN tournent leur concavités en ſens contraires, & — lorſqu'elles les tournent en même ſens. Et par conſéquent $DM + HN = \frac{AE \times KF}{DK}$ ou $HN = \frac{AE \times KF}{DK} - DM$ dans le premier cas, & $DM - HN = \frac{AE \times KF}{DK}$ ou $HN = DM - \frac{AE \times KF}{DK}$ dans le ſecond. L'on aura de même $HNE = \frac{AE \times KFL}{DK} - DMA$ dans le premier cas, & $HNE = DMA - \frac{AE \times KFL}{DK}$ dans le ſecond.

Si au lieu de prendre les origines en K, D, H, comme l'on vient de faire, on les eût priſes en L, A, E, la derniere Analogie précédente auroit donné de même $EN = \frac{AE \times LF}{DK} - AM$ dans le premier cas

& $EN = AM - \frac{AE \times LF}{DK}$ dans le ſecond.

PROBLEME.

La longueur d'une Courbe quelconque étant donnée entiere & par parties, trouver les longueurs entiere & par parties de toutes celles que ſa dévelopée peut former en ſe développant comme l'on voudra. Fig. 32.

SOLUTION.

SOit une courbe quelconque ACH dont le développement commence en quel point & en quel ſens l'on voudra : par exemple en A juſqu'en H ; en H juſqu'en A ; en C juſqu'en A & enſuite juſqu'en H. Je dis qu'une des courbes AMD, HNE, PCQ, décrites par ces dévelopemens, étant donnée entiere & par parties, les autres le ſeront auſſi, chacune en particulier, dépendemment de la quadrature du cercle.

I. Car ſi la courbe AMD eſt donnée, l'on a vu (*Art.* 77 *&c.**) que ſa dévelopée ACH le ſera auſſi entiere & par parties. Ainſi les droites DH, AE, MCN, qui ne ſont (*hyp.*) que cette même courbe redreſſée, ſeront auſſi connues chacune en particulier. On connoîtra de même les parties MC, CN, de la droite MCN, puiſque (*hyp.*) elles ne ſont auſſi que les arcs AC, CH, rédreſſés. *Des Infin. Pet.

Préſentement pour connoître les arcs HN, NE, CQ, CP, ſoit du centre D, & d'un rayon quelconque DK, l'arc circulaire KFL rencontré en F & en L par les rayons DF, DL, paralelles à MN, AE

Cela poſé, l'on aura (*Cor.* 3. *hujus.*) 1°. $HN = \frac{AE \times KF}{DK} - DM$, $EN = \frac{AE \times LF}{DK} - AM$, $HNE = \frac{AE \times KFL}{DK}$

$- AMD$: 2°. $CQ = DM - \frac{DQ \times KF}{DK}$. 3°. $PC = EN - \frac{PE \times LF}{DK} = \frac{AE - PE \times LF}{DK} - AM = \frac{AP \times LF}{DK} - AM$. Ce qui donnera la rebrouſſée entiere $PCQ = DM - AM + \frac{AP \times LF - DQ \times KF}{DK}$ (à cauſe de $AP = DQ$) $= DM - AM + \frac{PQ \times LF - KF}{DK}$. Et dans toutes ces valeurs il n'entre d'inconnu que les arcs circulaires, puiſque (*hyp.*) tout le reſte eſt donné, c'eſt-à-dire ſur les portions de la courbe AMD auſſi bien (*Art. 77. &c* *) que de ſa développée ACH.

* *Des Infin. Pet.*

II. Il eſt viſible que ſi au lieu de AMD, l'on eût donné HNE entiere & par parties, l'on auroit trouvé de même (*Art. 77. &c.*) ſa développée ACH & enſuite (*Cor. 3. hujus.*) 1°. $DM = \frac{AE \times KF}{DK} - HN$, $AM = \frac{AE \times LF}{DK} - EN$, $AMD = \frac{AE \times KFL}{DK} - HEN$. 2°. $CQ = DM - \frac{DQ \times KF}{DK} = \frac{AE - DQ \times KF}{DK} - HN = \frac{HQ \times KF}{DK} - HN$. 3°. $PC = EN - \frac{PE \times LF}{DK}$. Ce qui donne ſa rebrouſſée entiere $PCQ = EN - HN + \frac{HQ \times KF - PE \times LF}{DK} = EN - HN + \frac{PE \times KF - LF}{DK}$. Il n'entre encore dans ces valeurs que des arcs de cercle, outre ceux de la courbe donnée HNE, & de ſa developée ACH (*Art. 77. &c.*) ſemblablement connue.

III. De même encore, ſi au lieu d'une des courbes AMD ou HNE, l'on eût donné la rebrouſſée PCH entiere & par parties, l'on auroit auſſi trouvé (*Art. 77. &c.*) ſa développée ACH : ſçavoir AC par le moyen de l'arc PC dont il eſt la développée, & CH

par le moyen de l'arc CQ dont il eſt auſſi la développée. Cette développée ACH ainſi trouvée, l'on aura (*Cor.* 3.) comme cy-deſſus, 1°. $DM = CQ + \frac{DQ \times KF}{DK}$, 2°. $EN = PC + \frac{PE \times LF}{DK}$. Enſuite ſe ſervant comme cy-deſſus, des arcs DM, EN, qu'on vient de trouver; c'eſt-à-dire, en trouvant (I.) $HN = \frac{AE \times KF}{DK} - DM$, & (II.) $AM = \frac{AE \times LF}{DK} - EN$; & y ſubſtituant enſuite les valeurs trouvées de DM, EN, l'on aura 3°. $HN = \frac{\overline{AE - DQ} \times KF}{DK} - CQ = \frac{PE \times KF}{DK} - CQ$, & 4°. $AM = \frac{\overline{AE - PE} \times LF}{DK} - PC = \frac{AP \times LF}{DK} - PC$. Outre les arcs de la courbe donnée PCQ, & de ſa développée ACH (*Art. 77. &c.*) ſemblablement connue, on voit encore qu'il n'entre dans ces valeurs que des arcs de cercle & des lignes droites; & par conſéquent qu'elles ne dépendent encore que de la quadrature du cercle.

Quant aux arcs partiaux de la rebrouſſée PCQ, il eſt viſible qu'en regardant ſes parties PC, CQ, comme deux courbes diſtinctes, l'on en aura telles parties qu'on voudra par le moyen de leurs paralelles HNE, AMD, comme dans le Corol. 3. de ce Lemme ci (*art. 166.* *) dépendemment ſeulement de la quadrature du cercle en connoiſſant ces arcs paralelles entiers & par parties. Par exemple, en connoiſſant AMD entier & par parties, l'on aura ſuivant ce Corol. 3. les arcs CQ & HNE entiers & par parties; enſuite HNE donnera encore de même (*Corol. 3.*) l'arc PC entier & par parties. Si les concavités des arcs CQ, CP, étoient tournées du même côté, comme dans

* *Des Infin. Petits.*

* *Des Infin. Petits.* les rebrouſſées que l'Auteur appelle (*art. 109.**) *de la ſeconde ſorte*, il eſt viſible (*Cor. 3.*) qu'une des courbes *AMD*, *HNE*, ſuffiroit pour les connoître immédiatement (c'eſt-à dire ſans paſſer par l'autre) entiers & par parties, & dépendemment de la ſeule quadrature du cercle.

Donc ſuivant cette méthode, la longueur d'une courbe quelconque étant donnée entiere & par parties, on pourra toujours trouver les longueurs entieres & par parties de toutes celles que la dévelopée peut former en ſe dévelopant comme l'on voudra. *Ce qu'il falloit trouver.*

* *Des Infin. Petits.* Tel eſt l'uſage qu'on peut faire du Lemme de la page 146, (*Art. 166.**) pour la rectification des courbes engendrées par quelque dévelopement que ce ſoit: En voici encore un ſemblable & de pareille étendue par la quadrature des eſpaces que ces courbes renferment.

LEMME.

Fig. 31. Des Infin. Pet. *Toutes choſes demeurant les mêmes que dans la Fig.* 131, *ajoutez-y ſeulement* m q *paralelle à* MN. *Je dis que* $AE \times MD - \frac{\overline{AE}^2 \times KDF}{\overline{DK}^2} = MCGD - NCGH = MpD - NpH$.

DEMONSTRATION.

PUiſque (*hyp.*) les triangles *FDf*, *nmq* ſont ſemblables, l'on aura $\overline{DF}^2 . \overline{mn}^2$ ou $\overline{MN}^2 :: FDf . nmq = \frac{\overline{MN}^2 \times FDf}{\overline{DF}^2} = \frac{\overline{AE}^2 \times FDf}{\overline{DK}^2}$. De plus *MN* étant (*hyp.*) perpendiculaire ſur *Mm*, & paralelle à *mq*, l'on aura auſſi $MNqm = MN \times Mm = AE \times Mm$. Donc

$AE \times Mm - \frac{\overline{AE}^2 \times FDf}{\overline{DK}^2} = MNqm - nmq = MCm - NCn$; & par tout de même. Donc en intégrant, $AE \times MD - \frac{\overline{AE}^2 \times KDF}{\overline{DK}^2} = MCGD - NCGH = MpD - NpH$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

Page 147, *Article* 167.

COROL. I.) L'on aura de même $AE \times AM - \frac{\overline{AE}^2 \times LDF}{\overline{DK}^2} = MCBA - NCBE = MrA - NrE$, & $AE \times AD - \frac{\overline{AE}^2 \times LDK}{\overline{DK}^2} = ABCGD - EBCGH = AOD - HOE$.

Page 155, *ligne* 8.

Devenant négative,) parcequ'alors G ſe trouve entre M & I.

Page 155, *Art.* 180, *ligne* 9.

PArcequ'alors $n = \frac{2am+2bm}{b}$; & par conſéquent $n - m = \frac{2am+2bm}{b} - m = \frac{2am+bm}{b}$; ce qui donne $mn - mm = \frac{2amm+bmm}{b}$.

Page 156, *ſur le Lemme III. Art.* 181.

PROPOSITION.

Les Secteurs BAE, DCF, *ſont en raiſon compoſée des quarrés de leurs côtés* AB, CD, *& des angles* A, C; *c'eſt-à-dire*, ABE. CDF :: $A \times \overline{AB}^2$. $C \times \overline{CD}^2$. Fig. 33.

DEMONSTRATION.

Fig. 34. SOit $AH = CD$, & du centre A l'arc HK. Soient $AB = a$, AH ou $CD = b$, $BE = e$, $HK = f$, $DF = g$. L'on aura $BE\,(e) . HK\,(f) :: AB\,(a) . AH$ ou $DC\,(b)$. Et $HK\,(f) . DF\,(g) :: HK\,(f) . DF\,(g)$. Donc en multipliant par ordre ces deux rangées de proportionnelles, l'on aura $e . g :: af . bg$. Et par conſéquent $aaf . bbg :: ae . bg :: \frac{ae}{2} . \frac{bf}{2}$. ou $aaf\,(A \times \overline{AB}^{2}) . bbg\,(C \times \overline{CD}^{2}) :: \frac{ae}{2}\left(\frac{AB \times BE}{2}\right) . \frac{bf}{2}\left(\frac{CD \times DF}{2}\right)$ :: ſect. ABE. ſect. — CDE. *Ce qu'il falloit démontrer.*

COROLLAIRE.

AInſi deux ſecteurs circulaires quelconques ſont entr'eux comme les produits de leurs angles par les quarrés de leurs côtés ou de leurs rayons.

Page 160, *ligne* 12.

POur voir que $PQ - 2APE = AK \times PE \pm KP \times AE$. Soit $AK = a$, $PK = z$, $EP = y$, AE ou $EH = x$. L'on aura $PQ - 2APE = \overline{a + z} \times \overline{y + x} - ax - zy = ay + ax + zy + zx - ax - zy = ay + zx$ ou (à cauſe que lorſque P eſt au-deſſus de K, $KP\,(z)$ eſt négatif) $= ay \pm zx = AK \times EP \pm AE \times PK$.

Page 160, *ſur le Corollaire II. Art.* 185.

AU-deſſus du centre K l'on aura $\frac{aa+ab}{bc} \times - KP \times AE$, & $- KP = v - c$; ce qui fera $\frac{aa+ab}{bc} \times - KP \times AE = \frac{\overline{aa+ab} \times \overline{c-v}}{bc} \times AE = \frac{aac+abc-aav-abv}{bc} \times AE$. Donc, ajoutant

ajoutant le ſecteur AKE ($\frac{1}{2}c \times AE$), le tout ſera $= \frac{aac+abc-aav-abv}{ac} + \frac{1}{2}c \times AE = \frac{bcc+2aac+2abc-2aav-2abv}{2bc} \times AE$.

Page 161, art. 185, ligne 5.

LA courbe exprimée par l'équation $z = \frac{xx-aa}{\sqrt{2xx-aa}}a$ Fig. 35. quatre branches ND avec deux aſymptotes BE, telles qu'on les voit ici : ces quatre branches ne different que de poſition de celle qui ſe voit dans la Fig. 41. de cet article *, laquelle ſuffiſoit pour ce dont il s'y agiſſoit, qui étoit de faire remarquer qu'il y a des courbes qui paroiſſent avoir des points d'inflexion ou de rebrouſſement, leſquelles cependant n'en ont point. * Des Infin. Petits.

Il eſt à remarquer dans cette Figure-ci, l'équation $z = \frac{xx-aa}{\sqrt{2xx-aa}}$ donne $AD = a$, & $AB = a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Quant aux touchantes en D, cette équation $z = \frac{xx-aa}{\sqrt{2xx-aa}}$ délivrée de ſignes radicaux, devenant $x^4 - 2aaxx + a^4 = 2zzxx - aazz$, l'on aura $4x^3dx - 4aaxdx = 4zzxdx + 4xxzdz - 2aazdz$, ou $4x^3dx - 4aaxdx - 4zzxdx = 4xxzdz - 2aazdz$; d'où l'on tire $\frac{dz}{dx} = \frac{4x^3-4aax-4zzx}{4xxz-2aaz} = \frac{2x^3-2aax-2zzx}{2xxz-aaz}$. Mais la ſuppoſition de $x = a$, & de $z = o$, telles que ſont x & z en D, rendant l'un & l'autre terme de cette fraction $= o$, il faut les differencier ſéparément ſuivant la Sect 9. art. 163.* Et l'on aura $\frac{dz}{dx} = \frac{12xxdx-4aadx-4zzdz-8zxdz}{8zxdx+4xxdz-2aadz}$; & en ſubſtituant les valeurs de x & de z en D, c'eſt-à-dire, $x = a$, & $z = o$, il vient $\frac{dz}{dx} = \frac{8aadx}{2aadz} = \frac{4dx}{dz}$; ce qui donne $\frac{dz^2}{dx^2} = 4$, & $\frac{dz}{dx} = \pm 2$; & enfin $\frac{zdz}{dx} + 2a = AT$. * Des Infin. Petits.

Il eſt à remarquer qu'on a tout d'un coup $\frac{xdz}{dx} = za$, en différenciant l'égalité $z = \frac{xx-aa}{\sqrt{2xx-aa}}$; parcequ'alors elle n'exprime que les branches qui ont z poſitive.

Il eſt encore à remarquer qu'en faiſant $x = a + dx$, & $z = dz$ dans $\frac{dz}{dx} = \frac{2x^3-3axx+2xxx}{2axx-aax}$, il vient encore $\frac{dz}{dx} = \frac{4dx}{dz}$, &c.

Page 161, Article 186, ligne 6.

DIFFICULTE'.

LE lieu étant $z = \frac{xx-aa}{\sqrt{2xx-aa}}$, l'Auteur dit que lorſque $x < a$, la valeur de z eſt négative ; cela eſt viſible tant que $2xx$ n'eſt pas $< aa$; mais lorſque $2xx < aa$, alors $2xx - aa$ étant négatif auſſi bien $xx - aa$, il ſemble d'abord que $\frac{xx-aa}{\sqrt{2xx-aa}}$ (z) doive être poſitive, comme faite d'un négatif diviſé par un autre négatif.

RE'PONSE.

LA réponſe en eſt facile : c'eſt que quoique $2xx - aa$ fût négatif, $\sqrt{2xx-aa}$ ſeroit poſitif, mais alors racine imaginaire ; & comme il y en a de poſitives & de négatives, il faudroit $-\sqrt{2xx-aa}$ pour que celle ci fût négative. De même $\sqrt{-aa}$ eſt une racine poſitive, quoique $-aa$ ſoit négatif, & $-\sqrt{-aa}$ eſt négative ; l'une & l'autre étant imaginaire.

Page 161, Article 186, ligne 11.

Fig. 36. POur décrire la courbe NDN, ſoit l'hyperbole équilatere DQ dont A ſoit le centre, AD le demi-axe

tranſverſal, l'ordonnée PQ. Joignez AQ ſur laquelle ſoit la perpendiculaire PR; prolongez QP, & faites $NP = QR$. Je dis que N eſt un des points de la courbe cherchée NDN.

Car en poſant $AD = a$, $AF = x$, $NP = z$; l'on aura $PQ = \sqrt{xx - aa}$, $AQ = \sqrt{2xx - aa}$; & par conſéquent $\frac{\overline{PQ}^2}{AQ}$ $(\frac{xx-aa}{\sqrt{2xx-aa}})$ $RQ = NP$ (z) donc $z = \frac{xx-aa}{\sqrt{2xx-aa}}$.

Page 162, ligne 4.

DE ce que $Rm\ (dy) . Pp$ ou $RM\ (dx) :: PN . AD$. On conclud ici que la courbe EDF touche l'aſymptote BG en E; parceque P ſe trouvant alors en B, PN devient cette aſymptote elle-même, c'eſt-à-dire, infinie; & par conſéquent AD zero par raport à elles. $dx\ (BF)$ ſera auſſi pour lors zero par raport à dy; & par conſéquent la courbe FDE doit toucher en E l'aſymptote BG; en F, parcequ'il s'agit de la courbe EDF.

On conclud auſſi que cette même courbe doit toucher AD au point D; à cauſe qu'en ce point PN devenant infiniment petite par raport à AD, dy devient auſſi nulle par raport à dx; & par conſéquent cette courbe doit encore toucher AD en D.

Page 162, ligne 8.

POur trouver que le rayon de la dévelopée de la courbe EDF eſt $= -\frac{x^3}{2aa}$, il faut conſiderer que la ſuppoſition donne $ady = \frac{xxdx-aadx}{\sqrt{2xx-aa}}$, & de là 1°. $dy^2 = \frac{\overline{xx-aa}^2}{2aaxx-a^4} \times dx^2$; & 2°. (en prenant dx conſtante) $ddy =$

$\frac{2xdx^2\times\sqrt{2xx-aa}-\frac{\overline{xx-aa}\times dx}{\sqrt{2xx-aa}}}{2aax-a^3}=\frac{\overline{4x^3-2aax-2x^3+2aax}\times dx^2}{2aax-a^3\times\sqrt{2xx-aa}}=$

$\frac{2x^3dx^2}{2aax-a^3\times\sqrt{2xx-aa}}$. Ce qui donne $dx^2+dy^2=dx^2+\frac{xx-aa}{2aax-a^3}\times dx^2=\frac{x^4dx^2}{2aax-a^3}$; & par conſéquent $\overline{dx^2+dy^2}\times\sqrt{dx^2+dy^2}=\frac{x^6dx^3}{2aax-a^3\times a\sqrt{2xx-aa}}$. Donc (*Art. 78.*) $\frac{\overline{dx^2+dy^2}\times\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,ddy}=\frac{x^6dx^3\times\overline{2aax-a^3}\times\sqrt{2xx-aa}}{2aax-a^3\times a\sqrt{2xx-aa}\times-2x^3dx^3}=$

$=\frac{x^6}{2aax^3}=-\frac{x^3}{2aa}$ ſera le rayon cherché de la développée.

Page 162, ligne 25.

* *Des Infin. P. iii.*

IL eſt viſible que le lieu $y^4=x^4+aaxx-b^4$ donne deux courbes oppoſées comme dans la Fig. 141.* puiſque ſoit qu'on prenne x ou y poſitif ou négatif, ce même lieu reviendra toujours. La regle conſiſte en ce que lorſque les dimenſions de x & de y ſont toutes paires, qu'elles quelles ſoient d'ailleurs, il y aura toujours deux courbes oppoſées.

Pour avoir la valeur de DD, il n'y a qu'à faire $y=o$; & l'on aura $x^4+aaxx=b^4$ ou $x^4+aaxx+\frac{1}{4}a^4=b^4+\frac{1}{4}a^4$, ou $xx+\frac{1}{2}aa=\sqrt{4b^4+a^4}=\frac{1}{2}\sqrt{4b^4+a^4}$, ou $x=\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}\sqrt{4b^4+a^4}}=AD$; & parconſéquent $2AD$ ou $DD=\sqrt{-2aa+2\sqrt{a^4+4b}}$.

QUESTION *à éxaminer.*

Fig. 142. 143. des Infin. Pet.

Sçavoir ſi le lieu $y^4=x^4+aaxx-b^4$ *a le rayon de la développée toujours poſitif, & ſi en* D *il eſt* $=\frac{a}{2}$.

SOLUTION.

1°. $dy = \frac{4x^3\,dx + \frac{3}{2}aax\,dx}{4y^3} = \frac{2x^3\,dx + aax\,dx}{2y^3}$

2°. $dy^2 = \frac{2x^3 + aax \times dx^2}{4y^6}$

3°. $dx^2 + dy^2 = \frac{4y^6\,dx^2 + 2x^3 + aax \times dx^2}{4y^6}$

4°. $\sqrt{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{4y^6 + 2x^3 + aax \times dx^2 \sqrt{4y^6 + 2x^3 + aax}}{8y^9}$

5°. $ddy =$ (dx conſtante) $\frac{6x^2y^3 + a^2y^3 \times dx^2 - 6x^3y^2 - 3aax)^2 \times dx\,dy}{2y^8}$

6°. $ddy =$ (en ſubſtituant la valeur de dy) $\frac{12x^2y^6 + 2a^2y^6 - 12x^6y^2 - 12a^2x^4y^2 + 3a^4x^2y^2 \times dx^2}{4x^2}$

7°. $- dx\,ddy = \frac{-12x^2y^6 - 2a^2y^6 + 12x^6y^2 + 12a^2x^4y^2 + 3a^4x^2y^2 \times dx^2}{4y^9}$

8°. $\frac{dx^2 + dy^2 \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,ddy} = \frac{4y^6 + 2x^3 + a^2x^2 \times \sqrt{4y^6 + 2x^3 + a^2x^2}}{24x^6y^2 + 24a^2x^4y^2 + 6a^4x^2y^2 - 24x^3y^6 - 4a^2y^6}$

$=$ au rayon de la développée de la courbe dont le lieu eſt $y^4 = x^4 + aaxx - b^4$.

COROLLAIRE.

LEquel rayon devient 1°. négatif lorſque $x > \sqrt{\frac{1}{2}aa + \frac{16^4}{aa} + \sqrt{\frac{1}{16}a^4 + \frac{4}{2}b^4 + - \frac{2b^8}{a^4}}}$, ou bien lorſque $x > a\sqrt{\frac{1}{2}}$ ſi $b = o$; & 2°. infini lorſque $y = o$ c'eſt-à-dire en D.

Page 164, ſur le Corollaire II. art. 188.

ENtre toutes les coupées KM, KN, tirées d'un même point K, & non tirées de points infiniment proches : dans le premier cas elles n'ont de differencielles

qu'en *D* qu'elles deviennent égales ; & non en *A* où il n'y a plus qu'une coupée, l'autre étant devenue infiniment petite, & par conſéquent nulle par raport à elle. Ci-après (*page 166**) on voit qu'il ne s'agit ici que d'appliquées qui partent d'un même point, & non de points infiniment proches.

* Des Infin. Petits.

Page 165, art. 190, ligne 12.

LA raiſon pour laquelle on n'en demeure pas à $y = \frac{3vx}{4}$, & qu'on reporte cette égalité dans $x^3 + y^3 = axy$, c'eſt qu'elle contient encore deux inconnues x & y, dont il en faut chaſſer une pour avoir l'autre ; & c'eſt ce qu'on fait par cette comparaiſon d'égalités.

Page 165, art. 190, ligne 19.

IL eſt à remarquer que les ordonnées perpendiculaires à l'axe des courbes rebrouſſantes, ſont le plus ſouvent obliques à ces courbes au point de rebrouſſement ; & que dans les autres courbes elles leurs ſont toujours perpendiculaires ou touchantes au point de retour.

Page 167, ligne 2.

IL eſt à remarquer que quoique la progreſſion Arithmétique m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, $m+4$, &c. ſemble ne convenir qu'à celles qui n'ont que l'unité pour différence, elle exprime cependant toutes les progreſſions Arithmétiques en général. Car en prenant l'indéterminée $m = \frac{n}{p}$ dont le haut & le bas ſont auſſi indéterminés, cette progreſſion ſera $\frac{n}{p}$, $\frac{n}{p}+1$, $\frac{n}{p}+2$, $\frac{n}{p}+3$, $\frac{n}{p}+4$, &c. Ainſi l'équation égalée à zero, étant multipliée par l'autre, le ſera auſſi par celle-ci ; & en la multipliant toute par p, elle le ſera par cette autre

n, $n+p$, $n+2p$, $n+3p$, $n+4p$, &c. dont la différence (p) ſera tout ce qu'on voudra, ſans ceſſer d'être égale à zero, c'eſt-à-dire ſans que cette égalité ceſſe d'être $= o$.

Au même endroit.

CEtte derniere progreſſion ſe préſente immédiatement encore par la même méthode de la page 167 * Car ſi au lieu de multiplier cette équation $x^3 * - ayx$ » $+ y^3 = o$ par x^m, on la multiplie par $px^{\frac{n}{p}}$, l'on aura (ſans y changer un ſeul mot) $px^{\frac{n}{p}+3} *$, &c $=$ » o, dont les termes doivent être multipliés par ceux » de la progreſſion $\frac{n}{p}+3$, $\frac{n}{p}+2$, $\frac{n}{p}+1$, $\frac{n}{p}$, chacun par » ſon correſpondant pour en avoir la différence

» $px^{\frac{n}{p}+3} \quad * \quad - payx^{\frac{n}{p}+1} \quad + py^3x^{\frac{n}{p}} = o.$

» $\frac{n}{p}+3, \quad \frac{n}{p}+2, \quad \frac{n}{p}+1, \quad \frac{n}{p}$

» $\overline{n+3p} \times x^{\frac{n}{p}+3} * - \overline{n+p} \times ayx^{\frac{n}{p}+1} + ny^3x^{\frac{n}{p}} = o.$

» Ce qui donnera $\overline{n+3p} \times x^{\frac{n}{p}+3} - \overline{n+p} \times ayx^{\frac{n}{p}+1}$ » $+ ny^3x^{\frac{n}{p}} = o$, & en diviſant par $x^{\frac{n}{p}}$, il viendra » $\overline{n+3p} \times x^3 - \overline{n+p} \times ayx + ny^3 = o$, comme on » l'auroit trouvée d'abord en multipliant l'égalité propoſée, par la progreſſion $n+3p$, $n+2p$, $n+p$, n.

Ce ſont les propres termes de la méthode, page 167.* C'eſt auſſi la même progreſſion qu'on vient de déduire de $m+3$, $m+2$, $m+1$, m.

* Des Infin. Petits.

* Des Infin. Petits.

PROPOSITION.

SI $A \ldots\ x^3 \ldots - ayx + y^3 = o$, multiplié par 3, 2, 1, 0, donne
$B \ldots\ 3x^3 \ldots - ayx = o$; je dis que l'on aura auſſi
$C \ldots\ \overline{n+3p}\times x^3 \ldots - \overline{n+p}\times ayx + ny^3 = o$.

DEMONSTRATION.

EN multipliant B par p, l'on aura
$D \ldots\ 3px^3 \ldots - payx = o$.
De même multipliant A par n, l'on aura auſſi
$E \ldots\ nx^3 \ldots - nayx + ny^3 = o$.
Donc en ajoutant D & E enſemble, l'on aura
$F \ldots\ nx^3 + 3px^3 \ldots - nayx - payx + ny^3 = o$, ou
$G \ldots\ \overline{n+3p}\times x^3 \ldots - \overline{n+p}\times ayx + ny^3 = o$.
Ce qui eſt la même égalité que C, qu'il falloit démontrer.

Page 167, ligne 11.

AInſi l'égalité $\overline{m+3}\times x^3 - \overline{m+1}\times ayx + my^3 = o$ (en faiſant $m = \frac{n}{p}$) ſera la même que $\overline{\frac{n}{p}+3}\times x^3 - \overline{\frac{n}{p}+1}\times ayx + \frac{n}{p}y^3 = o$; & en multipliant le tout par p, l'on aura $\overline{n+3p}\times x^3 - \overline{n+p}\times ayx + ny^3 = o$, qui eſt la même choſe que $x^3 \ldots - ayx + y^3 = o$ multiplié par la progreſſion univerſelle $n+3p$, $n+2p$, n. Dont les différences ſont telles qu'on voudra.

Page 171, ſur l'art. 198.

DIFFICULTE'.

EN prenant le point d'inflexion F pour la réunion des deux points touchans M & D, il ſemble que l'équation doive avoir quatre racines égales, chaque point d'atouchement (*art.* 193.*) en ayant deux.

* *Des Infin. Petits.*

RE'PONSE.

RE'PONSE.

IL faut remarquer que l'équation réduite aux deux points touchans *M* & *D*, y eſt parvenue de même que s'il n'y en avoit qu'un, & qu'il ne s'y eſt point réuni deux racines égales d'une part pour l'un & deux pour l'autre ; mais que de deux racines égales il s'en eſt évanoui une, ce qui a fait une équation d'atouchement pour tous les points où cette courbe peut être touchée d'un même point *T* ou *H* : de ſorte que de quelque nombre de touchantes qu'elle ſoit capable d'un de ces points, il n'y a qu'une de ſes racines égales à faire évanouir ; & il en reſtera encore tout autant d'égales ou inégales qu'il y a de tels points d'atouchement. Donc ici, y en ayant deux dont les racines doivent devenir égales au point d'infléxion ; ces deux avec celle qu'on a déja fait évanouir pour faire une équation à la touchante, en feront trois égales au point d'infléxion. De ſorte qu'il en faut faire évanouir deux par le produit de deux progreſſions arithmétiques quelconques, pour réduire l'équation au point d'infléxion. Et ſi après cela il reſte encore pluſieurs racines, c'eſt une marque qu'il y aura pluſieurs points d'infléxion.

Page 172. art. 199.

C'Eſt ici une équation aux tangentes *TM*, *TD* ou *HM*, *HD*, à la fois ; & il n'y a encore qu'une des racines égales evanouies, & il n'y en a plus à faire évanouir pour la réunion de ces deux tangentes.

Page 174, art. 203, ligne 17.

P*Uiſque l'on peut toujours trouver un cercle qui coupe*

une ligne courbe quelconque, autre qu'un cercle au moins en quatre points.) Voyez ci deſſus l'éclairciſſement donné ſur la *page* 11, *& ſuiv. art.* 10. Voyez, dis-je, la regle pour la diſpoſition des courbes & la remarque qui ſuit cette regle *pag.* 15 & 16. de ces Eclairciſſemens, ou ce que M. le Marquis de l'Hôpital dit ici, eſt démontré.

Page 175, ſur l'art. 204.

POur avoir la dévelopée, l'Auteur cherche une ſeconde égalité à la maniere de la premiere pour les comparer enſemble, afin de faire évanouir l'y, & pour en avoir une qui ne renferme d'indéterminées que les s & les t, qui ſont les abſciſſes & les ordonnées de la courbe cherchée. La premiere lui donne $y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}aat}$, & la ſeconde, $y = \frac{6aat}{8at-4aa} = \frac{3at}{4t-2a}$ (en faiſant $3 - \frac{1}{2}a = v$) $= \frac{3at}{4v}$. Donc $\sqrt[3]{\frac{1}{4}aat} = \frac{3at}{4v}$, & $\frac{aat}{4} = \frac{27a^3t^3}{64v^3}$ ou $16v^3 = 27att$.

Remarquez que cette méthode eſt facile pour avoir les lieux des dévelopées.

Page 178, *ligne* 3.

PRenez garde que l'on prend ici en general $\frac{xx+yy}{2y} = \frac{aa}{2y}$ ou $xx + yy = aa$, parcequ'on y ſuppoſe que AMB eſt un cercle dont C eſt le centre, & que par tout $CM = a$. Mais page 179*, on ne le ſuppoſe pas ainſi, parceque AMB eſt une autre courbe où les perpendiculaires CM ne ſont pas partout égales.

* Des Infin. Petits.

Prenez garde encore qu'on fait ici les dx poſitifs, & les dy négatifs, & page 179, on fait les uns & les autres poſitifs.

Page 178, *ligne* 6.

SI l'on ne mettoit que $\frac{xx-yy}{x-y} = \frac{xx+yy}{xy}$, l'expreſſion ſeroit générale ; mais dès qu'on ſubſtitue *aa* en la place de $xx+yy$, & qu'on fait $\frac{xx-yy}{x-y} = \frac{aa}{b}$, on la rend particuliere au cercle.

Page 178, *ligne* 10.

C'eſt *x* qui eſt incommenſurable.

Page 179, *ligne* 7.

Le *dx* étant pris ici poſitif, on y fait *dy* négatif.

Page 179, *ligne* 22.

COmme ces *MC*, *mC*, ne ſçauroient être toutes perpendiculaires à la courbe *AMB* à moins que cette courbe ne ſoit un cercle ; il ne s'agit point ici de cauſtique, mais ſeulement d'une courbe *AFK* formée par l'interſection *F* des *MH*, *mh*, en ſuppoſant que les triangles *MHC*, *mHC*, ſont tout iſoſcelles.

Le *dx* & de *dy* ſont pris ici tous deux poſitifs, quoique *x* & *y* n'y croiſſent qu'alternativement comme dans le cas précédent.

AVERTISSEMENT.

LA dissertation qui suit n'est point un éclaircissement sur aucun endroit du Livre de M. le Marquis de l'Hôpital, quoiqu'elle soit sur les mêmes matiéres. Elle s'est trouvée à la fin des Eclaircissemens de M. Varignon sur ce Livre, & toute de sa main comme les Eclaircissemens. Il paroît que de son Regiſtre il l'avoit transportée là, & mise au net en l'état où elle est, afin de la faire imprimer avec ses Eclaircissemens. Ainsi c'est suivre ses intentions que de la donner ici au Public.

DE CALCULO EXPONENTIALI.

CALCULUS quantitatum ad potentias indeterminatas elevatarum, *exponentialis* idcirco dicitur. Hic autem ſtat quaſi medius inter Algebraïcum & tranſcendentem : accedit enim ad Algebraïcum, eo quod terminis finitis ut ut indeterminatis conſtet ; ad tranſcendentem verò, quod nullâ conſtructione Algebraïcâ exhiberi poſſit. Hinc colligere eſt quàm ſuperfluus fuerit jocus Hugenii, curvas exponentiales appellando *hypertranſcendentes*, cùm ſeriò potiùs & congruè illas nominare potuiſſet *hypotranſcendentes*.. Eſt enim & ipſa logarithmica (omnium profectò tranſcendentium ſimpliciſſima) ex hoc curvarum genere, omneſque aliæ exponentiales ope hujus conſtrui & earum tangentes determinari poſſunt, ut ex jam dicendis patebit.

Porrò tranſcendentem ſeu infinitè parvorum calculum huic adhiberi non poſſe in conſiderationibus primis aſſeruit D. Nievwentiit : reſpondit D. Leibnitius ; ſecundas addidit conſiderationes D. Nievwentiit, in quarum ultimâ ſectione tria videntur quæ ſuſpenſum eum maximè tenent circa ea quæ de calculo exponentiali reſpondit ei Leibnitius. Quamobrem ſolvendi primùm illius ſcrupuli ; dein exponendus eſt modus tractandi æquationes curvarum in quibus indeterminatæ exponentes ingreditur.

SOLUTIO DUBIORUM
D. Nievwentiit circa Calculum exponentialem.

TRia ſunt, inquam, quæ hac in parte ſuſpenſum tenent D. Nievwentiit quominus aſcenſum tribuat. 1°. *Quomodo una eademque indeterminata poſſit eſſe in curvâ logarithmicâ de applicatarum genere, & ſimul abſciſſa alterius cujuſdam curvæ* ... 2°. *Quomodo ex æquatione* $x^v = y$, *deducatur hæc æquatio* — $vlx = ly$ (per *lx*, *ly*, *lz*, &c. Intelligo logarithmos ipſarum *x*, *y*, *z*, &c.) ... 3°. *Quomodo* l*x poſſit eſſe* $= S\frac{dx}{x}$.

Fig. 38. Eſto *DE* axis curvæ *HGF*, illique perpendicularis *DC*, axis logarithmicæ *AB*; producatur applicata *FE*, donec occurrat logarithmicæ *AB* in *B*, à quo demiſſa perpendicularis *BC*, æqualis erit abſciſſæ *DE*; eſt autem *BC* applicata logarithmicæ. Ergo patet quâ ratione abſciſſæ *DE*, cujuſcumque curvæ *HGF*, poſſint eſſe de applicatarum genere, non ſolùm in logarithmicâ, ſed in quavis etiam aliâ curvâ *AB*, & quidem ita ut ſalva maneat relatio inter *DE* & *EF*, quocumque etiam modo creſcat *DE*, ſive æqualiter ſive inæqualiter; adeò ut ſumptis ex. gr. differentiis axis logarithmicæ *Cc* æqualibus, nihilominus differentialis *Fg* ad differentialem *Ee*, ſeu ipſa *FE* ad ſubtangentem *EL*, ſuam generalem perpetuò ſervet rationem.

Ad demonſtrandum ſecundum, quod ſit $vlx = ly$, inſpiciat, ſi placet, vulgares, quæ proſtant, tabulas logarithmicas, quæ è veſtigio ipſum docebunt, logarithmum numeri quadrati, cubi, biquadrati, &c. eſſe duplum, triplum, quadruplum, &c. logarithmi radicis. Unde generaliter logar. $x^v = vlx$; quid ergo ſi $x^v = y$, annon & eorum logarithmi ſunt æquales, id eſt, $vlx = ly$?

Supereſt tertium, quod ita oſtendo. Si $AD = 1 =$ ſubtang. & $BC =$ numero; erit, ut conſtat, DC logarithmus ejuſdem. Eſt autem ex naturâ logarithmicæ ſubtang. in $Bn = BC \times Cc$; & per conſequens $\frac{Bn}{BC} = Cc$, propter ſubtang. $= 1$. Hinc ſi BC ſit x, y, z, &c. Et DC, lx, ly, lz, &c. erit $\frac{dx}{x}$, $\frac{dy}{y}$, $\frac{dz}{z}$, &c. $= dlx$, dly, dlz, &c. Ergo etiam ſummæ $S\frac{dx}{x}$, $S\frac{dy}{y}$, $S\frac{dz}{z}$, &c $= lx$, ly, lz, &c. Undè ſatis mirari nequeo, Doctiſſ. Nievwentiit, qui eamdem ferè demonſtrationem ſibi format, hic diſcrimen quærere in litteris, concedendo $S\frac{dy}{y} = ly$, ſed dubitando an etiam $S\frac{dx}{x} = lx$; quaſi arbitraria denominatio mutationem rei afferat.

Regeret quidem, id de omnibus indeterminatis valere ſi abſolutè conſiderentur; ſed hic x & y conſiderandas eſſe certo ad invicem reſpectu. Aſt quid tum? Demonſtratio generalis eſt & nullâ conditione, nullo reſpectu limitata. Demonſtratum enim eſt, quacumque ratione creſcant De, DE, ſeu bc, BC; quocumque demum appellentur nomine, ſive x, ſive y; ſive abſolutè, ſive reſpectivè conſiderentur, perpetuò earum logarithmos eſſe Dc, DC.

Quod autem aſſumatur $AD = 1 =$ ſubtang. id compendii gratiâ tantum fit: quamcumque enim quantitatem, quidni ergo & ſubtangentem, unitati ſubſtituere tutò licet, ſi modo ad aſſumptam cæteræ omnes referantur. Diſcuſſis jam, ut opinor, difficultatem nebulis, venio ad ipſam exponentialium tractationem.

DE IPSO CALCULO EXPONENTIALI.

QUantitates exponentiales ſunt diverſorum graduum, quorum infimus (qui hactenus tantùm fuerat conſide-

ratus) eſt , quando exponens conſtat indeterminatis ordinariis , ut y^m , x^n , z^p ; poſito m , n , p , eſſe quantitates ſimpliciter indeterminatas. Quantitas exponentialis ſecundi gradûs eſt , cùm exponens ipſe eſt quantitas exponentialis , ut y^{m^m} , z^{p^q} ; & ſic in univerſum quantitas exponentialis cujuſcumque gradûs habet pro exponente quantitatem exponentialem gradûs proximè præcedentis. Idem etiam intellige de æquationibus & curvis exponentialibus ; tunc æquatio & curva per illum deſignata ſortietur nomen à potiori. De quibus omnibus hæc habe :

Eſto logarithmica quævis AB , ſumptâque ſubtangente pro unitate , & ipſi æqualis prima applicata AD ; ordinata BC quovis modo varians , ſive ſit de applicatarum ſive de abſciſſarum genere alterius cujuſcumque curvæ , ſi modo per minima creſcat , ſive æqualiter ſive inæqualiter , ſit $= x$, y , z , adeòque $DC = lx$, ly , lz ; $Cc = dlx$, dly , dlz , &c. Unde fluit Regula generalis ſequens :

REGULA GENERALIS.

Differentiale logarithmi utcunque compoſiti eſt æquale differentiali numeri diviſo per numerum , *ut* $\mathrm{dl}\sqrt{xx+yy} = \frac{xdx+ydy}{xx+yy}$.

Ad differentiandum ergo quantitatem exponentialem primi gradûs m^n , fiat $m^n = t$. Ergo $nlm = lt$; & differentiando juxta calculum differentialem , $lmdn + ndlm = dlt$. At per Regulam generalem $dlm = \frac{dm}{m}$, & $dlt = \frac{dt}{t}$; ideòque $\frac{ndm}{m} + lmdn = \frac{dt}{t}$ (ob $m^n = t$) $= \frac{dt}{m^n}$. Undè dt ſeu $dm^n = nm^{n-1}\,dm + m^n lmdn$, id quod ſuggerit *Regulam primam ſpecialem* pro exponentialibus

tialibus primi gradûs ; poſſunt enim pro m & n quantitates intelligi quomodocumque ex indeterminatis compoſitæ.

REGULA SPECIALIS I.

$$dm^n = nm^{n-1}\,dm + m^n\,lmdn.$$

ESto jam exponentialis ſecundi gradûs m^{n^p}, ponatur illa $= t$; adeòque $n^p lm = lt$; & ſumptis utrobique differentialibus modo communi, $n^p dlm = dlt$. Quoniam autem per Regulam primam ſpecialem $dn^p = pn^{p-1}\,dn + n^p\,lndp$; & per Regulam generalem $dlm = \frac{dm}{m}$, $dlt = \frac{dt}{t}$; habebitur *Regula ſecunda ſpecialis* pro exponentialibus ſecundi gradûs, quæ hæc eſt.

REGULA SPECIALIS II.

$$dm^{n^p} = n^p m^{n^p-1}\,dm + pn^{p-1} m^{n^p} lmdn + n^p m^{n^p} lmlndp.$$

EOdem modo invenientur Regulæ ſequentes pro altiorum graduum exponentialibus. Nec difficilius differentiantur quantitates quomodocumque ex illis compoſitæ, ut $dm^n p^q = p^q dm^n + m^n dp^q$, ubi ſi ſurrogetur valor ipſarum dp^q, dm^n, modò ſupra inventus, prodibit differentiale quæſitum.

Hactenus explicata ſufficiunt pro generali exponentialium differentiandarum adumbratione. Videamus paucis applicationem in uno alterove exemplo.

I. Conſtruenda eſt curva, cujus natura exprimitur per hanc æquationem exponentialem $x^x = y$; ejuſque tangens determinanda.

Sumptis logarithmis, habetur $xlx = ly$. Facta itaque logarithmicâ AB, cujus ſubtangens ſit $= 1 = AD$, ſitque DE vel $BC = x$, erit $DC = lx$, & per *Fig. 38.*

(1) . (x) :: (lx) .

conſequens ſi fiat $AD . BC :: DC . DM$. Erit $DM = ly$, & $MN = y$, cui ſi æqualis applicetur EF ad abſciſſam DE, erit punctum F in curvâ optatâ HGF.

Tangens in F determinatur ſic : Per Regulam primam ſpecialem eſt $dy = x^x dx + x^x lxdx = ($ ſubſtituto y loco $x^x) = ydx + ylxdx$, id eſt, $y + ylx . 1 :: dy . dx :: y$. Subtang. $= \frac{1}{1+lx}$. Hinc ſumptâ EL tertiâ proportionali ad $AD + DC$ & AD, erit FL tangens ; quam proin in terminis ordinariis, id eſt, finitis expreſſimus.

Hujus autem curvæ notabiles quaſdam proprietates recenſuiſſe non abs re erit. Applicatæ AG, DH, ſubtangens puncti G, & AD, omnes inter ſe & ſubtangenti logarithmicæ ſunt æquales. Item ductâ ex H applicatâ ad logarithmicam HP, & PR parallelâ ipſi HD ſecante curvam in O ; erit OR omnium ordinatarum breviſſima, id eſt, punctum O omnium curvæ punctorum minimè diſtat ab axe DE.

Habemus etiam generalem Methodum quadrandi hujuſmodi Figuras, cui ipſe Leibnitius, licet conſimilem invenerit pro ingenii quo pollet acumine, haud tamen facilè obviam eſſe ultrò agnovit. Hanc interim animadverto quadraturam præ omnibus aliis memorabilem, quæ ob curioſam ſeriem, quâ exprimitur, mirificè placuit huic geometræ. Si enim AD vel DH vel AG vocetur 1, erit ſpatium $DAGOH =$ ſummæ ſeriei $1 - \frac{1}{2^1} + \frac{1}{3^1} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5}$ &c.

II. Quod ſi proponatur curva, cujus æquatio $x^y = a$: habebitur ad logarithmos redacta $ylx = la$; undè, ut ſupra per logarithmicam factum eſt, elicitur curvæ conſtructio. Differentiando autem per Reg. 1. ſpec. erit $xlxdy = - aydx$, id quod ſubtangentem determinat.

III. Eſto curvæ æquatio $x^x = a^y$, & proinde xlx

$= yla$, quod conſtructioni inſervit: ſumptis per Reg. 1. ſpec. differentialibus, obtinetur $dx + lxdx = lydy$, ex quo pariter ſubtangentis determinatio fluit. Obſervatu dignum hic venit, quod hujus figuræ quadratura citra ſeriem poſſit exhiberi; eſt enim $lydx = \frac{xxlx - xx}{la}$.

IV. Si proponeretur $a^x = y$; adeòque $xla = ly$: prodiret $yladx = dy$, id eſt, ſubtangens foret $= \frac{1}{la} =$ conſtanti. Unde concludendum æquationem propoſitam ipſi logarithmicæ competere.

V. Eſto jam exponentialis plurium terminorum ex. gr. $x^x + x^a = x^y + y$. Sumptis ſeparatim differentialibus cujuſcunque termini per Reg. 1. ſpec. reperietur $dx^x = x^x dx + x^x lxdx$, $dx^a = ax^{a-1}dx$, $dx^y = yx^{y-1}dx + x^y lxdy$, quæ ritè diſpoſita dabunt hanc æquationem $x^x dx + x^x lxdx + ax^{a-1}dx - yx^{y-1}dx = x^y lxdy + dy$. Facto itaque ut dy ad dx, id eſt, ut $x^x + x^x lx + ax^{a-1} - yx^{y-1}$ ad $x^y lx + 1$, ita y ad quartum; erit hæc quarta ſubtangens quæſita curvæ propoſitæ.

Nota interim quod multitudo terminorum conſtructionem planè non impediat; cùm enim mediante logarithmicâ ſingulis ſeorſim aſſignari poſſit quantitas æqualis, patet utique quantitates iſtas hoc modo aſſignatas & ſimul ſumptas formare illam ipſam quæ quæritur.

Exempla hucuſque allata abundè illuſtrabunt proceſſum inſtituendum in aliis primi gradûs exponentialibus, exque illis haud difficulter perſpicitur quomodo Methodus applicanda ſit ad altiores gradus: in omnibus enim par operandi ratio obſervanda eſt.

AVERTISSEMENT.

TOut cela eſt de M. Bernoulli le jeune, Profeſſeur à Groningue : il ſe trouve dans les Actes de Leipſik au mois de Mars de 1697, page 125, & ſeq. Je l'avois déja trouvé & écrit dans mon Regiſtre dès 1695, à l'occaſion de ce que M. Leibnitz venoit de répondre à M. Nieuwentiit ſur cette matiere dans les Actes de Leipſik au mois de Juillet de cette année 1695. Le voici tel que je le trouve dans ce Regiſtre : je n'y ai fait mention que des quantités exponentielles du premier degré, ne ſongeant pas alors à d'autres ; mais la Regle generale précedente de M. Bernoulli s'y trouve démontrée dès ce tems-là : ainſi il ne falloit que penſer aux autres degrés d'exponentielles pour les en tirer de même que je fis celles du premier. Je ne ſongeai point non plus alors à aucune caracteriſtique de logarithmes : je les appellai par des lettres particulieres dont il faut avouer que la multiplicité embaraſſe la mémoire ; c'eſt pour cela que je leur vas ſubſtituer la caracteriſtique l *de M. Bernoulli, c'eſt-à-dire, que pour exprimer les logarithmes de* a, b, c, &c. *Je dirai* la, lb, lc, &c. *Du reſte ce ſera la même choſe que dans le Regiſtre dont je viens de parler.*

METHODE

POUR TROUVER LES TANGENTES DES COURBES exprimées par des égalités qui ont des expoſans indeterminés.

LEMME I.

LE produit fait de l'expoſant d'une puiſſance quelconque, par le logarithme de ſa racine, eſt toujours le logarithme de cette même puiſſance.

DE'MONSTRATION.

SOit telle puiſſance a^p qu'on voudra, dont la racine a ait la pour logarithme. Je dis que pla eſt le logarithme de cette puiſſance a^p. Car par la nature des logarithmes, la ſomme des logarithmes de pluſieurs grandeurs eſt toujours le logarithme du produit qui en réſulte. Or la puiſſance a^p eſt un produit d'autant de grandeurs a qu'il y a d'unités dans ſon expoſant p. Donc la ſomme faite d'autant de fois le logarithme de a, qu'il y a d'unités dans p, c'eſt-à-dire, le produit pla, eſt le logarithme de la puiſſance a^p. *Ce qu'il falloit démontrer.*

LEMME II.

LE logarithme d'une grandeur variable quelconque, eſt égal à la ſomme des fractions faites de ſa differentielle diviſée par cette grandeur elle-même par ex. Le logarithme de y, *c'eſt* $S\frac{dy}{y}$.

DEMONSTRATION.

SOit ly le logarithme de la grandeur variable y, avec la logarithmique ABC dont l'aſymptote DO. Soit D l'origine des coupées $DE = ly$, les ordonnées $BE = y$, la ſoutangente $EF = a$. L'on aura $BE\,(y)\,.\,EF\,(a) :: BH\,(dy)\,.\,Hb\,(dly) = \frac{ady}{y}$. Donc en intégrant, * $S\frac{ady}{y} = ly$ logarithme de y; & par conſéquent en prenant $a = 1$, l'on aura $S\frac{dy}{y}$ pour le logarithme cherché de la grandeur y. *Ce qu'il falloit démontrer.* Fig. 39.

* Ces grandes S ſignifient Sommes.

COROLLAIRE. I.

SI au lieu de y la grandeur variable dont on cherche

le logarithme, eût été $b + z$, l'on auroit trouvé de même ſon logarithme $= S\frac{adz}{b+z}$ ou $S\frac{dz}{b+z}$; car en prenant y pour $b + z$, ſon logarithme $S\frac{ady}{y}$ ou $S\frac{dy}{y}$, ſe changera en $S\frac{adz}{b+z}$ ou $S\frac{dz}{b+z}$ logarithme de $b + z$.

On le peut encore démontrer immédiatement comme ci-deſſus, en prenant l'ordonnée AD pour la grandeur conſtante b, les BK (terminées par AK paralelle à DO) pour z, & DE pour $\overline{lb+z}$. Car l'on aura encore $BE(b+z).EF(a) :: BH(dz).Hb(\overline{dlb+z}) = \frac{adz}{b+z}$. De ſorte qu'en intégrant, l'on aura $S\frac{adz}{b+z} = \overline{lb+z}$ logarithme (*hyp.*) de $b + z$, ou en faiſant $a = 1$, l'on aura auſſi $S\frac{dz}{b+z}$ pour le logarithme de cette même grandeur $b + z$.

Fig. 40.

COROLLAIRE II.

PUiſque le logarithme d'une grandeur variable, vaut la ſomme des fractions de ſa difference diviſée par cette même grandeur,

1°. x^x aura ſon logarithme $= S\frac{x \times x^{x-1}dx}{x^x} = Sdx = x$.

2°. x^{x+p} aura ſon logarithme $= \frac{x+p \times x^{x+p-1}dx}{x^{x+p}} = S\frac{\overline{x+p} \times dx}{x} = S\overline{dx + \frac{pdx}{x}} = x + S\frac{pdx}{x}$.

3°. $x^3 + ax^2$ aura ſon logarithme $= S\frac{3xxdx+2axdx}{x^3+ax^2} = S\frac{3xdx+2adx}{xx+ax}$.

4°. $x^x + ax^{x-1}$ aura ſon logarithme $= S\frac{x \times x^{x-1}dx + \overline{x-1} \times ax^{x-2}dx}{x^x + ax^{x-1}}$ (diviſant le tout par x^{x-2}) $= S\frac{xxdx + \overline{x-1} \times adx}{xx+ax} = S\overline{dx - \frac{adx}{xx-ax}} = x - S\frac{adx}{xx-ax}$. Et ainſi des autres.

SCHOLIE.

IL eſt à remarquer que quoique le raport de x à dx ſoit infini, la fraction $\frac{dx}{x}$ n'eſt pas zero pour cela ; parceque dx eſt ici cenſée multipliée par la ſoutangente a de la logarithmique, laquelle ſoutangente eſt ici priſe pour l'unité linaire, & non pas numerique ; pour x, elle eſt multipliée par l'unité numérique.

Ainſi $\frac{dx}{x}$ eſt ici la même choſe que $\frac{adx}{x}$: c'eſt pourquoi l'on peut prendre indifferemment $S\frac{dx}{x}$ ou $S\frac{adx}{x}$ pour le logarithme de x ; & ainſi des autres. C'eſt-à-dire, qu'en prenant a pour la ſoutangente d'une logarithmique, tous les logarithmes ci-deſſus, multipliés par a, ſeront encore les mêmes ; & cette derniere maniere de les exprimer me paroît plus commode en bien des rencontres que celle de ci-deſſus.

REMARQUE.

POur ne ſe pas méprendre entre l'unité linaire & l'unité numérique, il ne faut jamais prendre aucune grandeur continue pour l'unité numérique. Il faut donc par tout ici reſtituer a pour l'unité qu'on a miſe en ſa place.

PROBLEME.

TRouver la ſoutangente de la courbe dont le lieu eſt $x^v = y$; *les coupées en ſont exprimées par* x, *les ordonnées par* y, *&* v *eſt un expoſant variable comme elles.*

SOLUTION.

PUiſque $x^v = y$, l'on aura (*Lem.* 1.) $vlx = ly$. Or (*Lem.* 2.) $lx = S\frac{dx}{x}$, & $ly = S\frac{dy}{y}$. Donc $v \times S\frac{dx}{x} =$

$S\frac{dy}{y}$. Ainſi en différenciant l'on aura $\frac{vdx}{x} + dv \times S\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, ou (en prenant lx pour $S\frac{dx}{x}$ logarithme de x) $\frac{vdx}{x} + lxdv = \frac{dy}{y}$. Mais à cauſe que x & y ſont (*hyp.*) données, l'on aura auſſi v ; & par conſéquent dv, par exemple $dv = mdx + ndy$; ce qui donnera auſſi m & n. Donc $\frac{vdx}{x} + lx \times mdx + lx \times ndy = \frac{dy}{y}$, ou $\frac{vdx}{x} + lx \times mdx = \frac{dy}{y} - lx \times ndy$; & par conſéquent $dx . dy :: \frac{1}{y} - nlx . \frac{v}{x} + mlx$. *Ce qu'il falloit trouver.*

SCHOLIE.

IL eſt à remarquer (*Lem.* 2.) que dans $S\frac{dx}{x}$, $S\frac{dy}{y}$, la ſoutangente a de la logarithmique a été faite $= 1$; & que ſi on l'eût exprimée, l'on auroit eu $S\frac{adx}{x}$, $S\frac{ady}{y}$, au lieu de $S\frac{dx}{x}$, $S\frac{dy}{y}$, pour les logarithmes de x, y. Le lieu $x^v = y$ auroit donné $v \times S\frac{adx}{x} = S\frac{ady}{y}$; & differenciant $\frac{vadx}{x} + dv \times S\frac{adx}{x} = \frac{ady}{y}$; ou (en prenant encore lx au lieu de $S\frac{adx}{x}$ logarithme de x, & $dv = mdx + ndy$, l'on aura $\frac{vadx}{x} + mlxdx + nlxdy = \frac{ady}{y}$, c'eſt-à-dire, $\frac{vadx}{x} + mlxdx = \frac{ady}{y} - nlxdy$; ce qui donne encore $dx . dy :: \frac{a}{y} - nlx . \frac{va}{x} + mlx$. *Ce qu'il falloit trouver.*

REMARQUE.

VOici comment M. Leibnitz le démontre dans les Actes de Leipſik du mois de Juillet 1695, pag. 314.

» Nempè ſit $x^v = y$, fiet $v \times log - x = log - y$.
» Jam $log - x = S\frac{dx}{x}$, & $log - y = S\frac{dy}{y}$. Ergo $v \times$
» $S\frac{dx}{x} = S\frac{dy}{y}$; quam differenciando, fit $\frac{vdx}{x} + dv \times log$
» $- x = \frac{dy}{y}$. Porrò v debet dari ex x & y, ambobus
» vel ſingulis. Ergo ſcribi poteſt $mdx + ndy = dv$, &
» m pariter atque n dabuntur ex x & y ; & prodibit
» $\frac{vdx}{x} + mdx \times log - x = \frac{dy}{y} - ndy \times log - x$; & fiet
» dx ad dy (ſeu ſubtang. ad ordinatam) ut y ad $\frac{v}{x} +$
» $m \times log - y$. [*Prenez garde : il faut*, $dx . dy :: \frac{1}{y} - n \times log$

$n \times log - x . \frac{v}{x} + m \times log - x.$] » Itaque habebitur mo-
» dus ducendi tangentem talis curvæ, ex ſuppoſitâ
» hyperbole quadraturâ vel logarithmis. Pro genera-
» li autem differenciatione exponentialium ſufficit Al-
» gorithmo meo hunc Canonem aſcribi. Diff. $x^v =$
» $vx^{v-1}dx + dv \times log - x.$ (Il faut : Diff. $x^v = vx^{v-1}dx$
» $+ x^v dv \times log - x.$) Undè ſi v ſit conſtans numerus, ut
» e, prodit diff. $x^e = ex^{e-1}dx$. Quod eſt Theorema no-
» ſtri Algorithmi pro differenciatione potentiarum vel
» radicum, dudum traditum.

AVERTISSEMENT. I.

JE trouve ici dans mon regiſtre qu'*il faut éxaminer ce Canon avec la derniere Analogie ci-deſſus.* Pour cette derniere Analogie, il eſt viſible que c'eſt une faute de calcul ou d'impreſſion, de même que dans le Canon précédent.

Voici la démonſtration de ce Canon : ſçavoir que diff. $x^v = vx^{v-1}dx + x^v dv \times log - x.$ Car ſoit $x^v = y$, l'on aura $vlx = ly$, & en differenciant $lxdv + vdlx = dly$ ou (*Lem.* 2.) $lxdv + \frac{vdx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dx^v}{x^v}$. Donc $dx^v = x^v lxdv + vx^{v-1}dx$, ou (dans le langage de M. Leibnitz) diff. $x^v = x^v dv \times log - x + vx^{v-1}dx$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AVERTISSEMENT II.

Voici ce qui ſuit dans mon Regiſtre.

REMARQUEZ que Nievwentiit ne ſe ſert point de logarithmes lorſque les expoſans ſont indéterminés, & qu'il les différencie auſſi. Par *ex.* pour differencier l'équation $x^v = y$, il feroit $\overline{x + dx}^{v+dv} = y + dy$; ce qui donne $x^{v+dv} + \overline{v + dv} \times x^{v+dv-1}dx$ &c $= y + dy$; & par conſéquent $x^{v+dv} + \overline{v + dv} \times x^{v+dv-1} - y\ (x^v)$

$= dy$. Mais parceque dv, dx, dy, ſont zero par rapport aux grandeurs auſquelles ils ſont joints, cette équation ſe réduit à $x^v - x^v = o$; ce qui eſt une propoſition identique qui, quoique vraie, ne prouve rien. C'eſt auſſi ce que M. Leibnitz trouve en ſuivant la pratique de M. Nievwentiit. Voici ſes paroles dans les Actes de Leipſix au mois de Juillet 1695, pag. 313.

» Ego quoque ſum expertus, ut ſi ſit $b^x = y$, po» ſitâ b conſtante, tunc * $b^{x+dx} - b^x = dy$; & hanc » dividendo per b^x, erit $b^{dx} - 1 = \frac{dy}{b^x}$; & pro dx & » dy ponendo o, fit $b^o - 1 = \frac{o}{b^x}$, ſeu $b^o - 1 = o$, » ſed $b^o = 1$, ut conſtat. Ergo fit $1 - 1 = o$. Sed ta» lis identiſmus in calculo meo differentiali evitatur. » Interim non diffiteor obtuliſſe ſe mihi caſus ubi iſta » quoque calculandi ratio non prorſus negligenda ſit.

* Car $b^x = y$ donne $b^{x+dx} = y + dy$; & en retranchant la premiere égalité de celle-ci, l'on aura $b^{x+dx} - b^x = dy$.

AVERTISSEMENT III.

JUſques-là, c'eſt ce qui ſe trouve dans mon Regiſtre ſous le titre de Methode pour trouver les tangentes des Courbes exprimées par des égalités qui ont des expoſans indéterminés. Voici ce que je trouve encore de ce même calcul dans un autre endroit de ce Regiſtre.

METHODE

POUR TROUVER LES VALEURS DES PUISSANCES dont les ſeuls expoſans ſont inconnus, c'eſt-à-dire, de trouver les expoſans inconnus.

DAns la Solution des égalités on n'a cherché juſqu'ici que les racines inconnues, les expoſans des puiſ-

ſances étant toujours ſuppoſés connus. Mais M. Leibnitz dans les Journaux de Leipſik (*1683, &c.*) raiſonnant ſur l'intereſt a rencontré des exemples où tout eſt connu, excepté les expoſans des puiſſances. En voici un qu'il donne dans le Journal de France du lundi 14 Juillet 1692. Sçavoir $c^x = ab^{x-1}$. On demande la valeur de l'expoſant x ; & il répond que *ce nombre ſera égal à ce qui provient lorſque le logarithme de* a, *moins le logarithme de* b, *eſt diviſé par le logarithme de* b.

Pour le démontrer, en voici la Methode.

LEMME.

LE produit fait de l'expoſant d'une puiſſance quelconque par le logarithme de ſa racine, eſt toujours le logarithme de cette même puiſſance.

La démonſtration en eſt ici la même que dans la Méthode précédente, c'eſt pour cela que je ne la rapporte point.

Les logarithmes des grandeurs ſe trouvent auſſi exprimées en cet endroit par des lettres particulieres ; mais pour une plus grande facilité, nous allons encore les exprimer par la caractériſtique *l* miſe au devant de ces grandeurs : ainſi *la* ſignifiera le logarithme de *a* ; de même *lx*, *ly*, *lz*, &c. ſignifieront les logarithmes de *x*, *y*, *z*, &c.

PROBLEME. I.

Soit $c^x = ab^{x-1}$; *on demande l'expoſant* x.

SOLUTION.

Je dis que $x = \frac{la-lb}{lc-lb}$.

DEMONSTRATION.

CAr puiſque (*hyp.*) $c^x = ab^{x-1}$, on aura $a . c :: c^{x-1} . b^{x-1}$. Donc par la nature des logarithmes & par le Lemme précédent $la . lc \mathrel{\ddot{-}} \overline{x-1} \times lc . \overline{x-1} \times lb$. Ce qui donne $la + xlb - lb = lc + xlc - lc$, & de là $la - lb = xlc - xlb$. Donc $\frac{la-lb}{lc-lb} = x$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

AVERTISSEMENT I.

J'Ajoute qu'en calculant comme dans la Methode des tangentes ci-deſſus, cette Démonſtration auroit été plus ſimple.

En effet puiſque (*hyp.*) $c^x = ab^{x-1}$, l'on auroit eu (*Lem. 1.*) $xlc = la + \overline{x-1} \times lb = la + xlb - lb$; & par conſéquent $xlc - xlb = la - lb$. Donc $x = \frac{la-lb}{lc-lb}$. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROBLÊME II.

Trouver un nombre x *tel que* x^x *ſoit* $= a$, *&* $x^{x+1} = b$.

SOLUTION.

PUiſque la premiere condition du Problême donne $x^x = a$; & par conſéquent $1 . x :: x^{x-1} . a$. La nature des logarithmes & le Lemme précédent donneront $li . lx \mathrel{\ddot{-}} \overline{x-1} \times lx . la$, en proportion arithmetique. Donc $li + la = lx + \overline{x-1} \times lx = xlx$. Et par conſéquent 1°. $\frac{li+la}{lx} = x$, ou 2°. $\frac{li+la}{x} = lx$.

De même, puiſque la ſeconde condition du Problême donne $x^{x+1} = b$; & par conſéquent $1 . x :: x^{x+1-1}$.

b. La nature des logarithmes & le Lemme précédent donneront encore $lr \cdot lx \mathbin{::} \overline{x+p-1} \times lx \cdot lb$, en proportion arithmétique ; donc $lr + lb = lx + xlx + plx - lx$ ou $lr + lb = xlx + plx$, ou bien encore $lr + lb - plx = xlx$. Et par conſéquent 1°. $\frac{lr+lb-plx}{lx} = x$, & 2°. $\frac{lr+lb}{x+p} = lx$.

SOLUTION. I.

DOnc $\frac{lr+la}{lx} = \frac{lr+lb-plx}{lx}$, ou $la = lb - plx$, ou $plx = lb - la$; ce qui donne $lx = \frac{lb-la}{p}$. Ainſi la grandeur cherchée x a pour le logarithme $\frac{lb-la}{p}$, c'eſt-à-dire, le quotient du logarithme de la raiſon de b à a, diviſé par la partie p donnée du ſecond expoſant x. *Ce qu'il falloit trouver.*

SOLUTION II.

DOnc auſſi $\frac{lr+la}{x} = \frac{lr+lb}{x+p}$; ce qui donne en faiſant évanouir les fractions, $xlr + xla + plr + pla = xlr + xlb$, ou $plr + pla = xlb - xla$. Donc $\frac{plr+pla}{lb-la} = x$. C'eſt-à-dire que la grandeur cherchée x eſt égale au quotient du produit du logarithme de a par p, diviſé par le logarithme de la raiſon de b à a. *Ce qu'il falloit trouver.*

AVERTISSEMENT II.

J'Ajoute encore qu'en calculant comme dans la Méthode des tangentes ci-deſſus, cette Solution auroit été beaucoup plus ſimple.

En effet puiſque (*hyp*) $x^x = a$, l'on auroit eu $xlx = la$; ce qui auroit donné $x = \frac{la}{lx}$, & $lx = \frac{la}{x}$.

De même puiſque (*hyp.*) $x^{x+p} = b$ l'on auroit eu $xlx + plx = lb$; ce qui auroit auſſi donné $x = \frac{lb+plx}{lx}$, & $lx = \frac{lb}{x+p}$.

Donc 1°. $\frac{la}{lx} = \frac{lb-plx}{lx}$; ce qui donne $lx = \frac{lb-la}{p}$. Et 2°. $\frac{la}{x} = \frac{lb}{x+p}$; ce qui donne $xla + pla = xlb$, ou $xlb - xla = pla$, & enfin $x = \frac{pla}{lb-la}$. *Ce qui eſt tout ce qu'il falloit trouver.*

Ces formules ne different des précédentes que de *li* logarithme de l'unité, lequel étant $= b$ ne devoit pas être compté dans la Solution du Regiſtre, qui fait la premiere de celles-ci.

Le contenu de ces Avertiſſemens 1 (Probl. 1. *) & 2 (* Probl. 2.*) ne ſe trouve point dans le Regiſtre ; mais bien tout le reſte avec ce qui ſuit.*

SCHOLIE.

SI l'on eût ſuppoſé $x^{x-p} = b$, ou $x^{-x-p} = b$, ou $x^{-x+p} = b$. On auroit trouvé de même la valeur de x. Comme c'eſt préſentement une choſe aiſée, je ne m'y arrêterai pas davantage.

FIN.

FAUTES A CORRIGER.

Page 5. *ligne* 6. dont l'artifice, *liſez* tout l'artifice.
Page 17, *ligne* 6, mettez à la marge *Fig* 5.
Page 24, *ligne* 20, mettez à la marge *Fig.* 10.
Page 32, *ligne* 9, PROHLE'ME, *liſez* PROBLE'ME.
Page 76, *ligne* 6, à la marge *Fig.* 32, liſez *Fig.* 31.
Page 77, à la marge *Fig.* 125, ajoutez *des Infin. Petits.*
Page 80. *ligne* 7, à la marge *Fig.* 33, liſez *Fig.* 32.
Page 83, *ligne* 3, à la marge *Fig.* 32, liſez *Fig.* 33.
Page 87, *ligne* 17, à la marge *Fig.* 33, liſez *Fig.* 34. & 35.
Page 88. *ligne* 2, à la marge *Fig.* 34, liſez *Fig.* 34. & 35.
Page 89, *ligne* 4, à la marge *Fig.* 35, liſez *Fig.* 35 *des Infin. Petits.*

De l'Imprimerie de J. QUILLAU, rue Gallande, 1725.

APPROBATION.

J'Ai lû par ordre de Monſeigneur le Garde des Sceaux un Manuſcrit qui a pour titre *Nouveaux Eclairciſſemens ſur l'Analyſe des Infiniment Petits*, par feu Monſieur Varignon, Profeſſeur de Philoſophie au College Royal, & des Académies des Sciences de Paris, de Londre, & de Berlin. J'ai cru que ces Eclairciſſemens feroient plaiſir au Public & ſeroient fort utiles. Fait à Paris ce dernier jour d'Avril 1723.

SAULMON.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS PAR LA GRACE DE DIEU ROY DE FRANCE ET DE NAVARRE : A nos Amez & feaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Senêchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien amé JACQUES ROLLIN Libraire à Paris, Nous ayant fait remontrer qu'il ſouhaiteroit faire imprimer & donner au Public un Livre qui a pour titre *Nouveaux Eclairciſſemens ſur l'Analyſe des Infiniment Petits*, par feu M. Varignon ; s'il Nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de Privilege ſur ce néceſſaires. A CES CAUSES, Voulant traiter favorablement ledit Expoſant ; Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer ledit Livre en tels volumes, forme, marge, caractere, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon lui ſemblera ; & de le vendre, faire vendre, & débiter par tout notre Royaume, pendant le temps de huit années conſécutives, à compter du jour de la datte deſdites Préſentes. Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance ; comme auſſi à tous Libraires-Imprimeurs & autres d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre & débiter, ni contrefaire ledit Livre en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits ſous quelque prétexte que ce ſoit, d'augmentation, cor-

Digitized by Google

rection, changement de titre ou autrement, ſnas la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de quinze cens livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris; l'autre tiers audit Expoſant, & de tous dépens, dommages & interêts: à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, & ce dans trois mois de la date d'icelles; que l'impreſſion de ce Livre ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & en beaux caracteres, conformément aux Reglemens de la Librairie; & qu'avant que de l'expoſer en vente, le manuſcrit ou imprimé qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Livre, ſera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le ſieur Fleuriau d'Armenonville, & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le ſieur Fleuriau d'Armenonville; le tout à peine de nullité des Préſentes, du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir l'Expoſant ou ſes ayans cauſes pleinement & paiſiblement ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie deſdites Preſentes, qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Livre, ſoit tenue pour dûement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & feaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoûtée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'éxecution d'icelles tous Actes requis & néceſſaires ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant Clameur de Haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires: Car tel eſt notre plaiſir. DONNE' à Paris le ſeptiéme jour du mois de Mai l'an de grace mil ſept cent vingt-trois, & de notre Regne le huitiéme. Par le Roi en ſon Conſeil, DE SAINT HILAIRE.

Regiſtré ſur le Regiſtre V°. de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, page 257. *N°.* 527. *conformément aux Reglemens, & notamment à l'Arreſt du Conſeil du* 13 *Août* 1703. *A Paris le* 28 *Mai* 1723. BALLARD, Syndic.

Fig. 1.

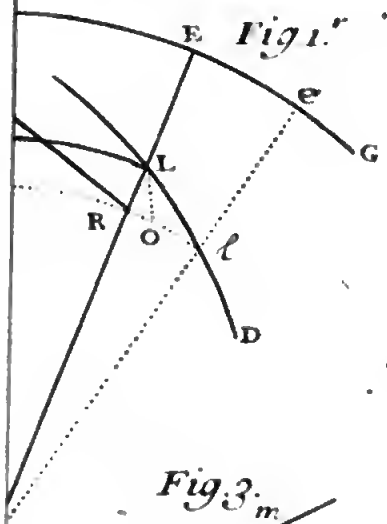


Fig. 2.

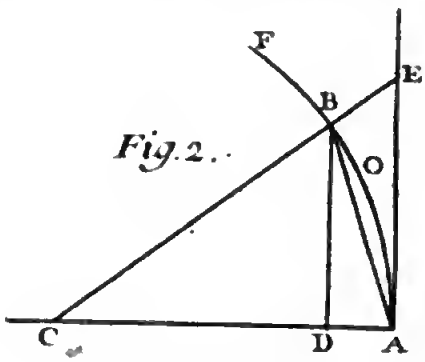


Fig. 3.

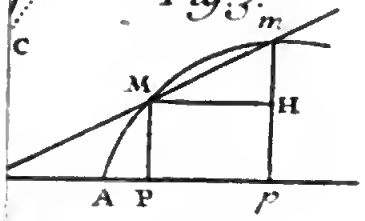


Fig. 4.

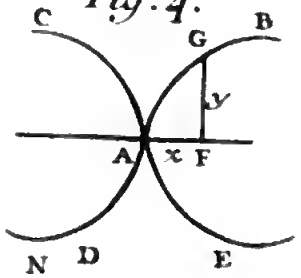


Fig. 5. Pag 16. et 17.

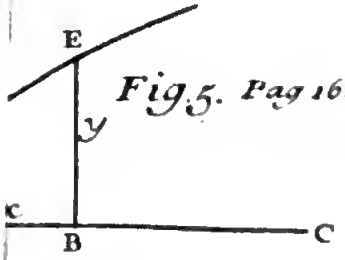


Fig. 6.

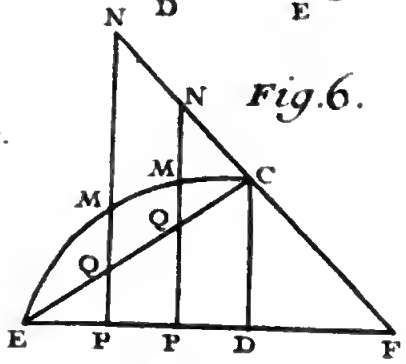


Fig. 7.

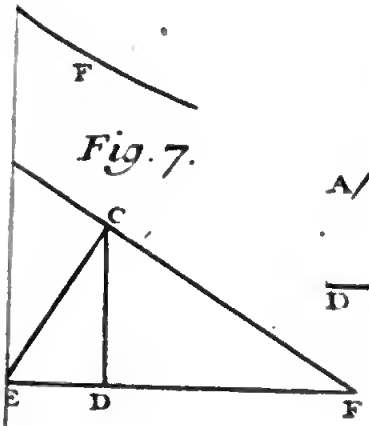


Fig. 8.

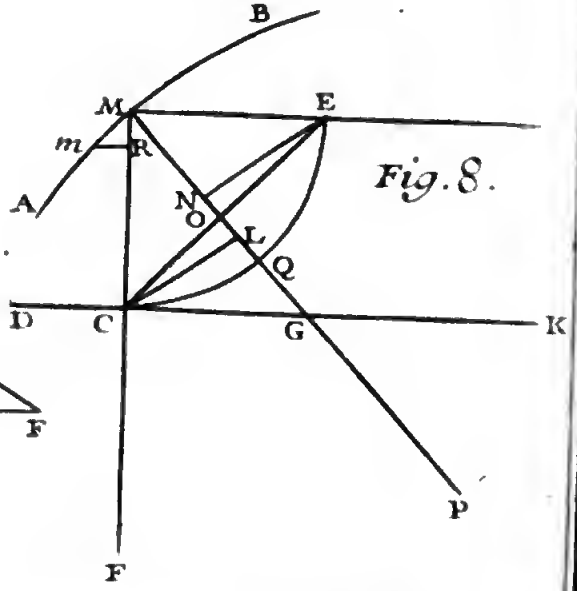


Fig. 9.

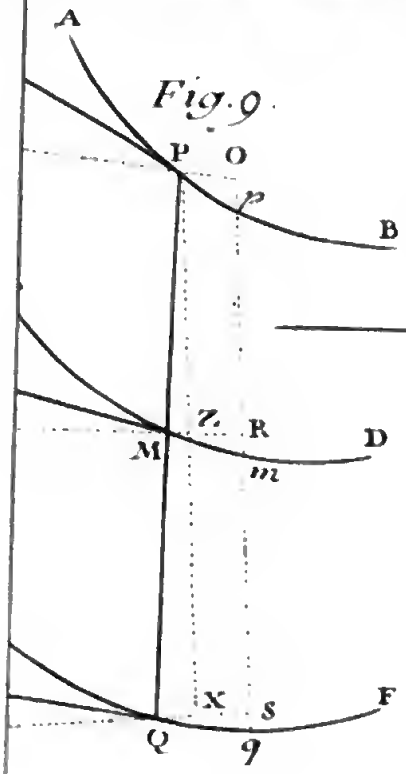


Fig. 10.

Pag 24.

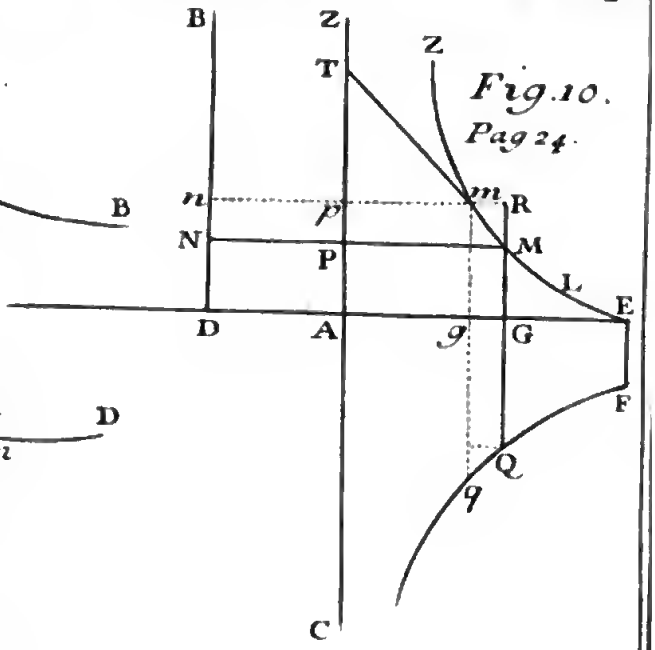


Fig. 11.

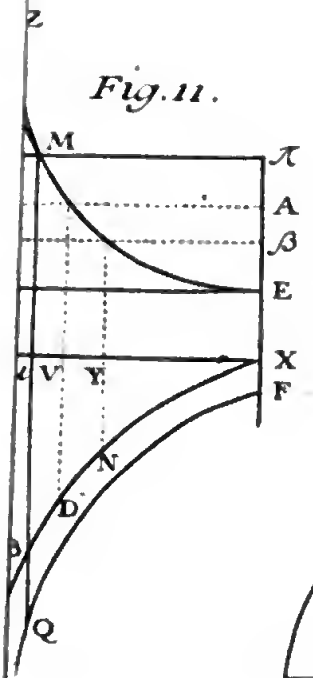


Fig. 12.

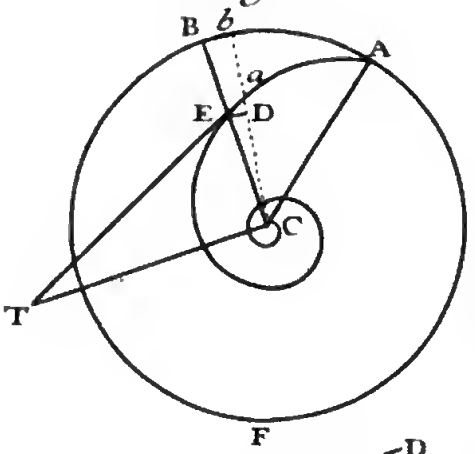
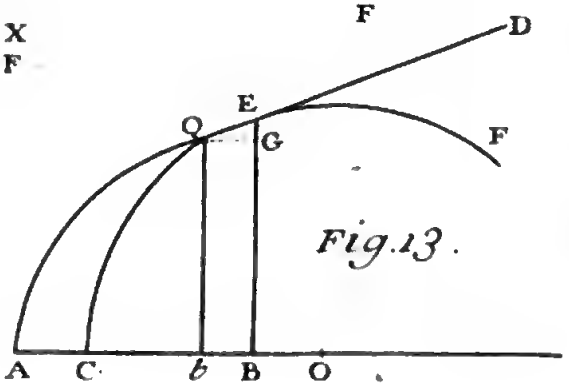


Fig. 13.



Digitized by Google

14

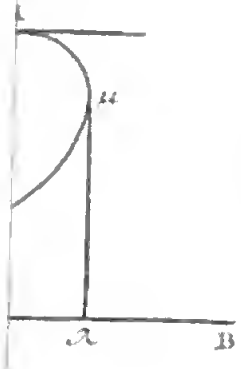
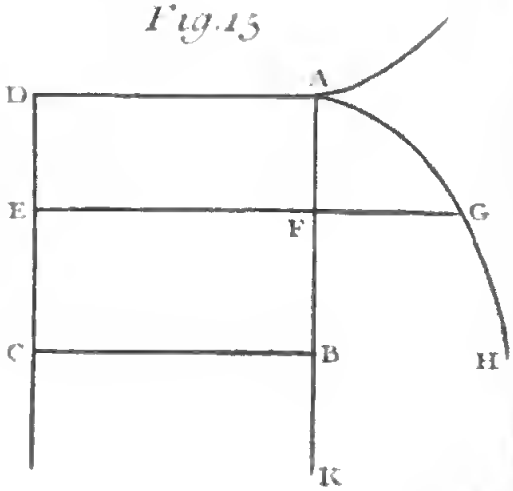
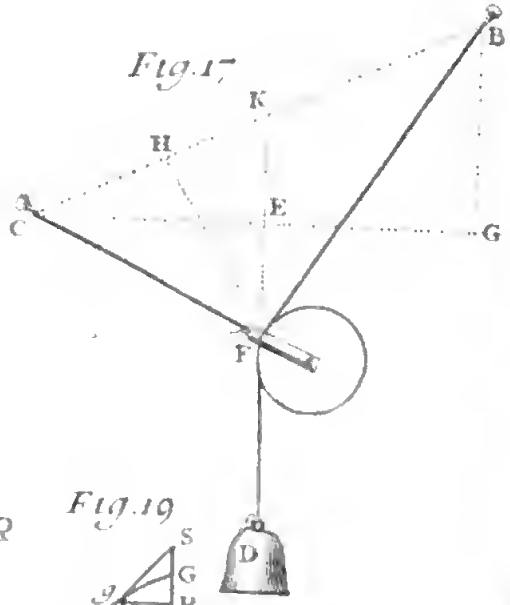


Fig. 15



g. 16

Fig. 17



g

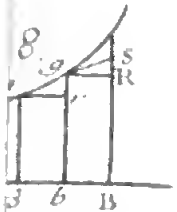
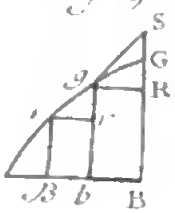


Fig. 19



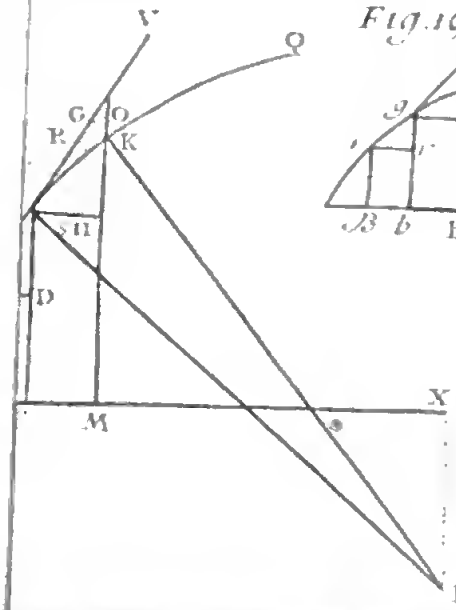
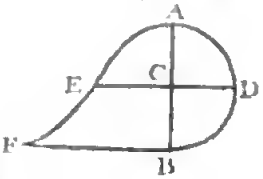


Fig. 20



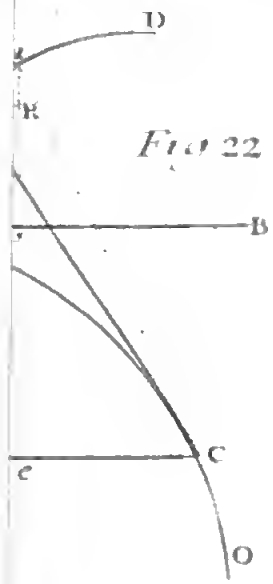


Fig 22

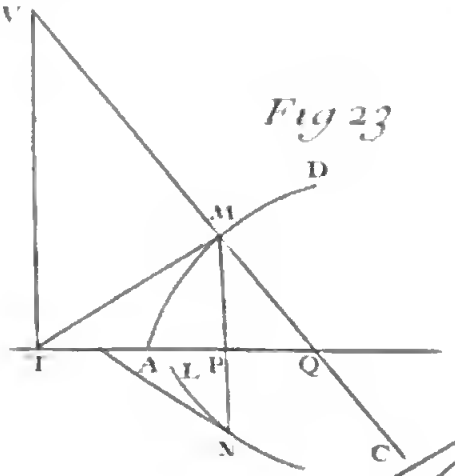
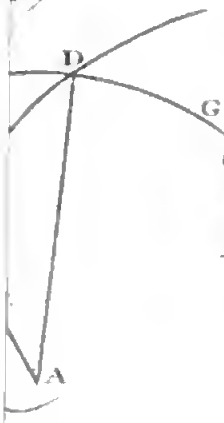


Fig 23



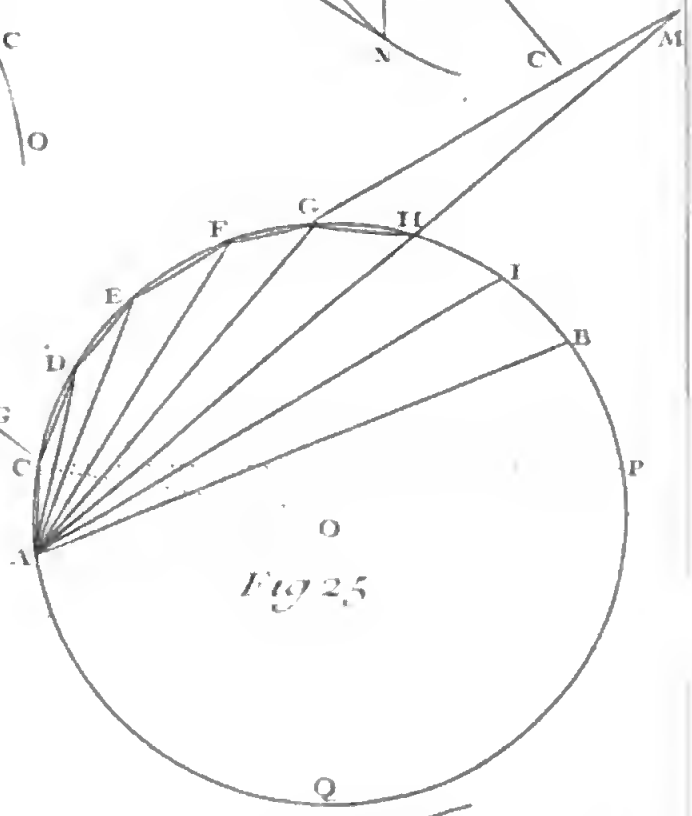
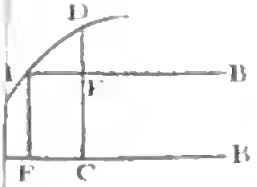


Fig 25

Fig 26



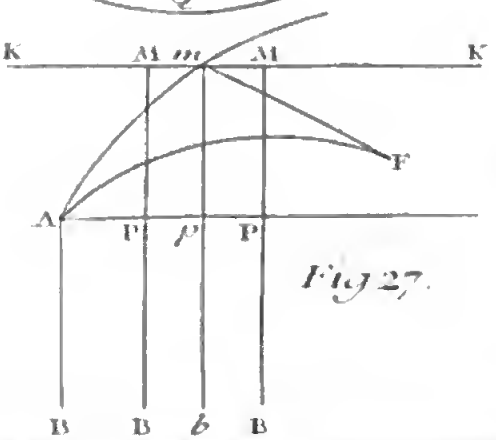


Fig 27.

Digitized by Google

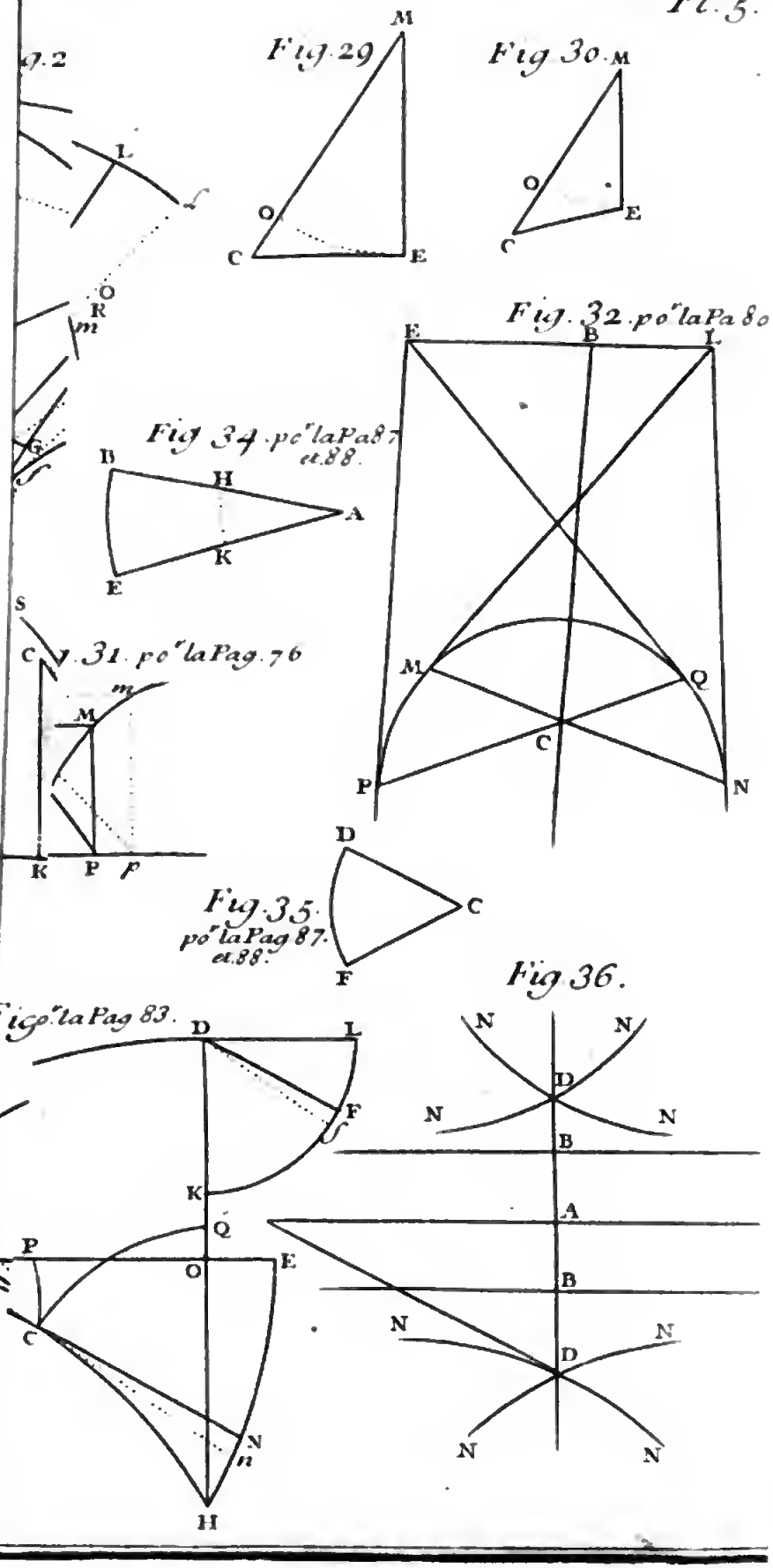

g. 2
L
f
O
R
m
G
Fig. 29
M
O
C
E
Fig 30.
M
O
E
C
Fig. 32. po. la Pa 80
E
B
L
M
Q
C
P
N
Fig 34. po. la Pa 87 et 88.
B
H
A
K
E
S
C
Fig. 31. po. la Pag. 76
m
M
K
P
f
D
C
F
Fig. 35. po. la Pag 87. et 88.
Fig. 36.
N
N
D
N
N
B
A
B
N
N
D
N
N
Fig. po. la Pag 83.
D
L
F
K
Q
P
O
E
C
N
n
H

Fig. 37. pour la pag 90.

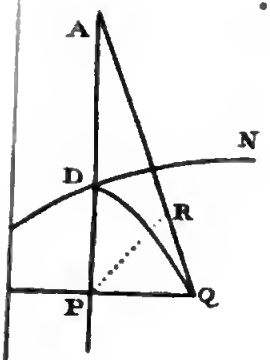


Fig. 38

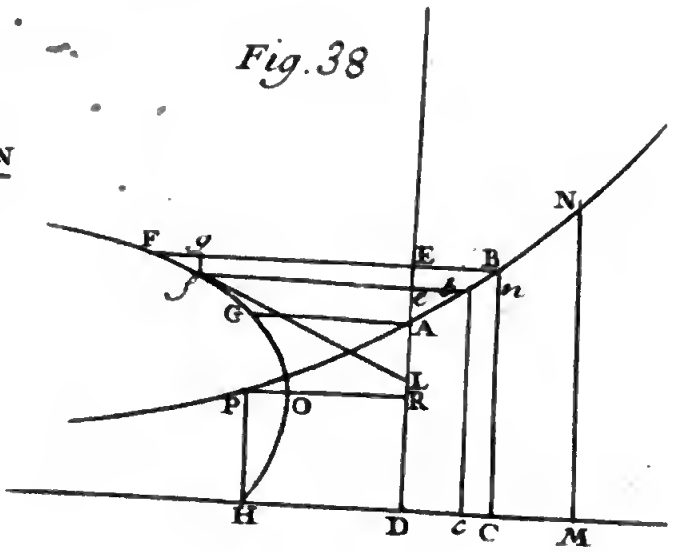


Fig. 39.

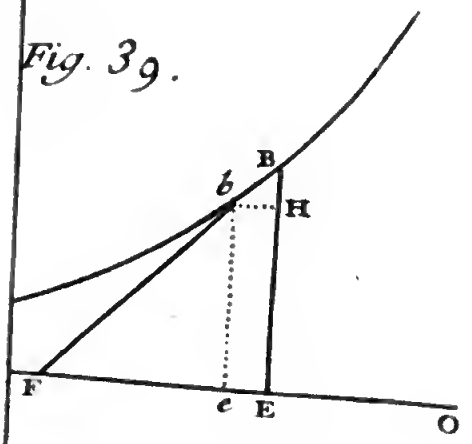
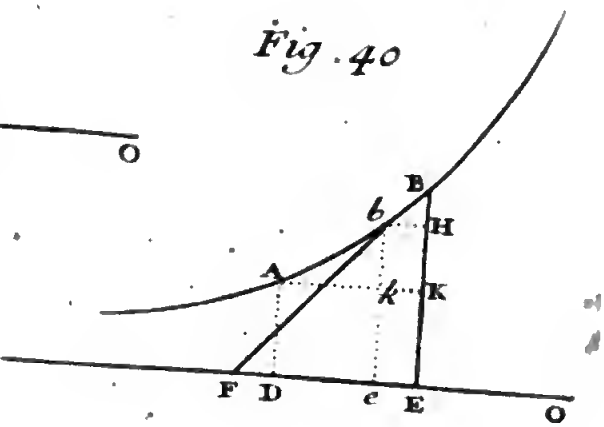


Fig. 40



KONSERVIERT DURCH
ÖSTERREICHISCHE FLORENZHILFE
WIEN 1967

00564966